



1 Image d'un nombre complexe

Définitions

On muni le plan d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Dans ce repère, on décide de représenter tout nombre complexe $z = x + iy$ par le point de coordonnées $M(x; y)$.

Ce point est appelé l'*image* de z .

Ce plan est appelé *plan d'Argand-Cauchy*.

L'axe horizontal est appelé l'*axe des réels*.

L'axe vertical est appelé l'*axe des imaginaires*.

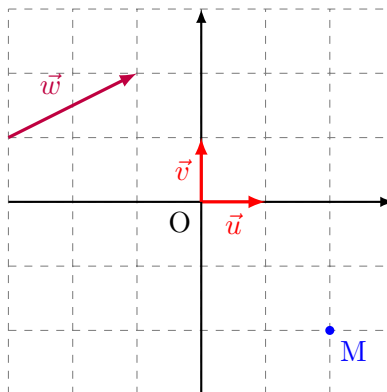
Définition

Dans le plan d'Argand-Cauchy, on considère un point $M(x; y)$ et un vecteur $\vec{w} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Alors le nombre complexe $z = x + iy$ est appelé l'*affiche* du point M et l'*affiche* du vecteur $\vec{w}$.

Exemples : Le point M a pour affiche $z_M = 2 - 2i$ car $M(2; -2)$.

Le vecteur $\vec{w}$ a pour affiche $z_{\vec{w}} = 2 + i$ car $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

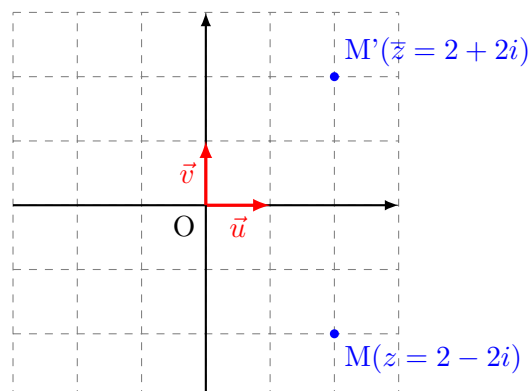


Propriété

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe et soit M son image dans le plan d'Argand-Cauchy.

L'image de $\bar{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des réels.

Exemple : M' d'affiche $\bar{z}$ est le symétrique du point M d'affiche z par rapport à l'axe des réels.



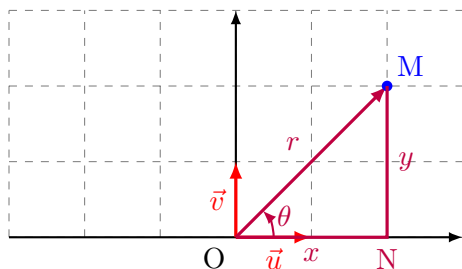
On notera alors, $\arg(z) = \frac{\pi}{4} \bmod{2\pi}$ ou $\arg(z) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$, pour désigner le fait que l'angle est défini à 2π près.

Propriété

Soit $z = x + iy$. On note $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$. Alors,

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}.$$

Démonstration



Définition 3.2

Soit z un nombre complexe de module r et dont un argument est égal à θ . La *forme trigonométrique* de z est :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Théorème

Soient z et z' deux nombres complexes, on a :

1. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$;
2. $\arg(z^n) = n \times \arg(z)$;
3. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$.

Démonstration

4 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Définition

Soit z un nombre complexe. On note $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$. La *forme exponentielle* de z est :

$$z = re^{i\theta}.$$

Remarque : Ainsi, on a :

$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}.$$

Cette égalité est très importante.

Propriétés

On considère les deux nombres complexes $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ avec $r \geq 0$ et $r' \neq 0$. On a :

1. $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$.
2. $z^n = r^n e^{ni\theta}$.
3. $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$.

Démonstration

4.1 Formules d'Euler

Propriété

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Démonstration

4.2 Formules d'addition et de duplication

Propriété

Soient a et b deux nombres réels, on a :

1. $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$;
2. $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$.

Démonstration

Propriétés

Pour tout nombre réel a , on a :

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
 $= 2\cos^2(a) - 1$
 $= 1 - 2\sin^2(a).$

2. $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$.

Démonstration

4.3 Formules de Moivre

Propriété

Pour tout entier relatif n et pour tout réel θ , on a :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Démonstration

[illegible]

5 Équations polynomiales complexes

Propriété

Soient z et a deux nombres complexes, et soit n un entier naturel non nul. Alors,

$$z^n - a^n = (z - a) \sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-k-1}.$$

Démonstration

Développons :

$$\begin{aligned}
(z-a) \sum_{k=0}^{p-1} a^k z^{p-k-1} &= z \sum_{k=0}^{p-1} a^k z^{p-k-1} - a \sum_{k=0}^{p-1} a^k z^{p-k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} a^k z^{p-k-1} \times z^1 - \sum_{k=0}^{p-1} a^k \times a^1 z^{p-k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} a^k z^{p-k} - \sum_{k=0}^{p-1} a^{k+1} z^{p-k-1} \\
&= (a^0 z^p + a^1 z^{p-1} + a^2 z^{p-2} + \dots + a^{p-1} z^1) \\
&\quad - (a^1 z^{p-1} + a^2 z^{p-2} + a^3 z^{p-3} + \dots + a^{p-1} z^1 + a^p z^0).
\end{aligned}$$

Tous les termes s'éliminent deux à deux sauf le premier et le dernier :

$$\begin{aligned}
(z-a) \sum_{k=0}^{p-1} a^k z^{p-k-1} &= a^0 z^p - a^p z^0 \\
&= z^p - a^p.
\end{aligned}$$

Définition

On note $\mathbb{C}_n[z]$ l'ensemble des polynômes de degré n à coefficients complexes :

$$\mathbb{C}_n[z] = \{c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0, c_k \in \mathbb{C}, 0 \leq k \leq n\}.$$

Si un polynôme P , à variable z , est de degré n et est à coefficients complexes, on écrira :

$$P \in \mathbb{C}_n[z].$$

Théorème

Soit $P \in \mathbb{C}_n[z]$.

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow P(z) = (z-a)Q(z) \quad , \quad Q \in \mathbb{C}_{n-1}[z].$$

Exemple : Soit $P(z) = 3z^3 - 5z^2 + 7z - 5$.

$$P(1) = 3 \times 1^3 - 5 \times 1^2 + 7 \times 1 - 5 = 0.$$

Par conséquent, on peut écrire :

$$P(z) = (z-1)(az^2 + bz + c).$$

Pour trouver les valeurs de a , b et c , on développe la forme factorisée :

$$P(z) = az^3 + bz^2 + cz - az^2 - bz - c$$

puis on regroupe les termes de mêmes puissances :

$$P(z) = az^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c$$

et enfin, on identifie les coefficients de chaque puissance de z à ceux de la forme développée initiale :

$$\begin{cases} a &= 3 \\ b-a &= -5 \\ c-b &= 7 \\ -c &= -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 3 \\ b &= -2 \\ c &= 5 \end{cases}$$

Finalement, on peut écrire :

$$P(z) = (z-1)(3z^2 - 2z + 5).$$

Il est désormais aisé de résoudre l'équation $P(z) = 0$.

Théorème

Tout polynôme de degré n admet au plus n racines complexes.

Démonstration

Nous allons ici démontrer que tout polynôme de degré n admet un nombre de racines inférieur ou égal à n .

Soit $P(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$ un polynôme de $C_n[z]$.

Supposons qu'il existe $n + 1$ racines à P , et notons-les $r_1, r_2, \dots, r_{n+1}$.

Alors, $P(z) = c_n(z - r_1)(z - r_2) \cdots (z - r_n)(z - r_{n+1})$.

Or, en développant, on obtient un terme dépendant de z^{n+1} , ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle $P \in C_n[z]$.

Par conséquent, il y a moins de $n + 1$ racines à P .

Remarque : Il existe des cas où les racines sont *multiples*.

Par exemple, $(z - 1)^3$ est un polynôme de degré 3 qui n'admet que 1 comme racine. Mais comme le facteur $z - 1$ apparaît trois fois dans la factorisation, on dit que la racine « 1 » est triple.

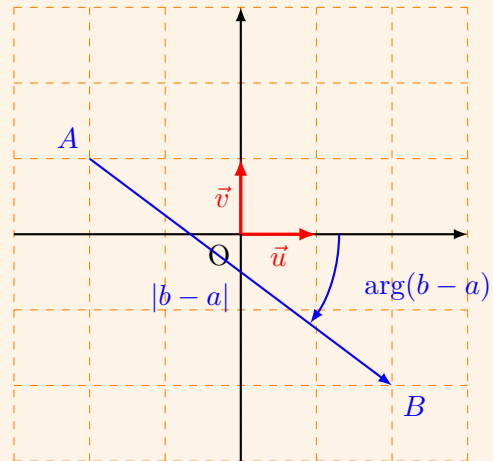
6 Distance et angles

Propriétés

On se place dans le plan d'Argand-Cauchy.

Soient A et B d'affixes respectives a et b .

- $|b - a| = AB$;
- $\arg(b - a) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB})$.



Démonstration

Propriété

Soient a , b et c trois nombres complexes, affixes respectives des points A , B et C dans le plan d'Argand-Cauchy.

$$- \left| \frac{c-a}{b-a} \right| = \frac{AC}{AB};$$

$$- \arg \left(\frac{c-a}{b-a} \right) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}).$$

Démonstration

Exemple : Soient $a = -4 + i$, $b = 3 - 3i$ et $c = 7 + 4i$ les affixes respectives de trois points A , B et C dans le plan d'Argand-Cauchy. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Calculons $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})$.

7 Racines n -ième de l'unité

Définition

Soit n un entier naturel. On appelle *racines n -ième* de l'unité tous les nombres complexes z tels que $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble de toutes ces valeurs :

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\}.$$

Pour construire $\mathbb{U}_n$, il est nécessaire de voir « 1 » comme un nombre complexe, et non plus comme un

nombre réel.

Propriété

Soit n un entier naturel.

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}.$$

Démonstration

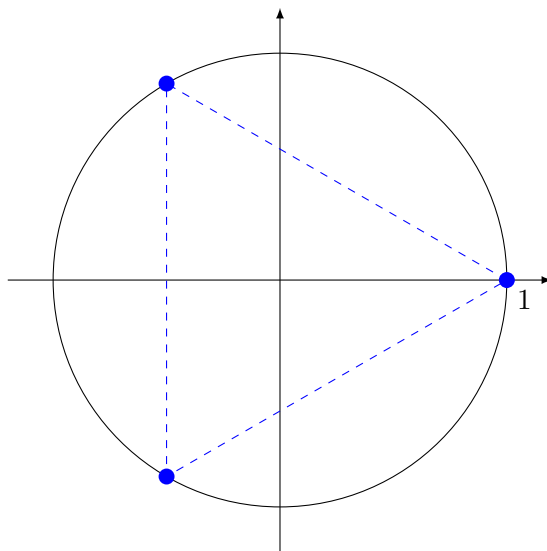
Exemples : On a ainsi :

$$- \mathbb{U}_2 = \left\{ 1; e^{\frac{2i\pi}{2}} \right\} = \{1; -1\}.$$

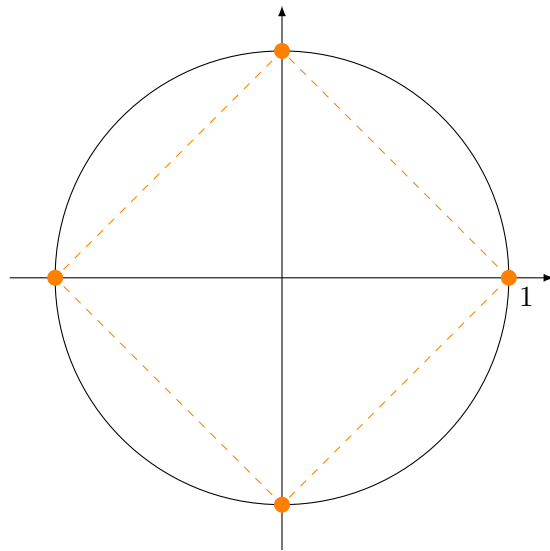
$$- \mathbb{U}_3 = \left\{ 1; e^{\frac{2i\pi}{3}}; e^{\frac{4i\pi}{3}} \right\}.$$

$$- \mathbb{U}_4 = \left\{ 1; e^{\frac{2i\pi}{4}}; e^{\frac{4i\pi}{4}}; e^{\frac{6i\pi}{4}} \right\} = \{1; i; -1; -i\}.$$

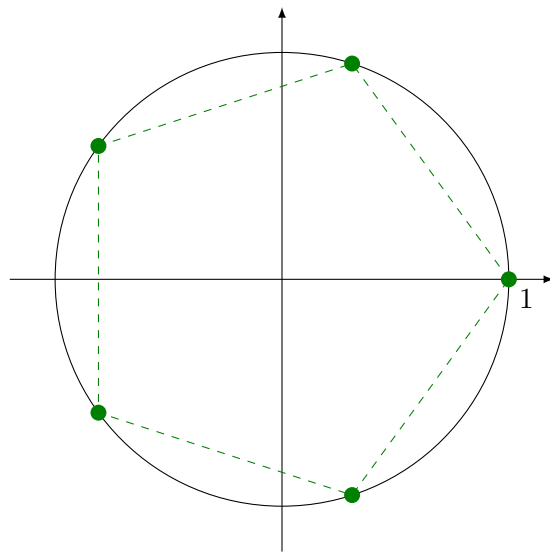
On peut représenter $\mathbb{U}_n$ à l'aide d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité :



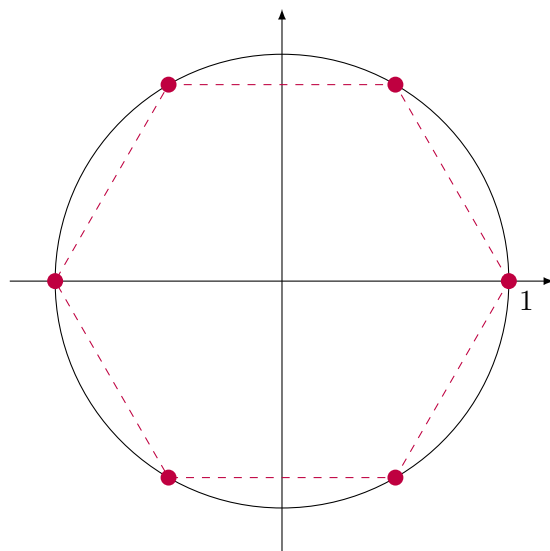
$\mathbb{U}_3$: triangle équilatéral.



$\mathbb{U}_4$: carré.



$\mathbb{U}_5$: pentagone régulier.



$\mathbb{U}_6$: hexagone régulier.