



Nombres complexes : Point de vue algébrique

maths-mde.fr



Introduction historique

Tout commence avec la résolution de l'équation :

$$x^3 = 15x + 4.$$

Au XVI^e siècle, en 1545 plus exactement, Jérôme Cardan, un mathématicien italien, a travaillé « dur » pour établir une formule qui pourrait donner une solution à toute équation de la forme $x^3 = px + q$. Il s'agit de la formule suivante :

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Si l'on considère l'équation que l'on souhaite résoudre, on prend $p = 15$ et $q = 4$, puis on applique cette formule :

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{4^2}{4} - \frac{15^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{4^2}{4} - \frac{15^3}{27}}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}}. \quad (1)$$

Diantre! Nous avons affaire à $\sqrt{-121}$... Cette formule serait-elle fausse? Qu'à cela ne tienne!

Le grand mathématicien est sûr de sa formule! Il décide alors d'aller au-delà de ces connaissances contemporaines et créer une nouvelle mathématique dans laquelle, il est possible calculer une racine carrée d'un nombre négatif!

Pour cela, il commence par considérer que $\sqrt{-1}$ existe, et il le note « i » de sorte que $i^2 = -1$.

Alors,

$$\sqrt{-121} = \sqrt{121 \times i^2} = \sqrt{(11i)^2} = 11i.$$

Ainsi,

$$(1) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2 + 11i} - \sqrt[3]{-2 + 11i}.$$

Par intuition, en appliquant les mêmes règles de calculs déjà connus, et utilisant la distributivité pour développer, il obtient :

$$\begin{aligned} (2 + i)^3 &= (2 + i)(2 + i)^2 \\ &= (2 + i)(2^2 + 4i + i^2) \\ &= (2 + i)(4 + 4i - 1) \\ &= (2 + i)(3 + 4i) \\ &= 6 + 8i + 3i + 4i^2 \\ &= 6 + 11i - 4 \\ &= 2 + 11i. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$2 + i = \sqrt[3]{2 + 11i}.$$

On démontrerait de même que :

$$-2 + i = \sqrt[3]{-2 + 11i}.$$

Finalement,

$$(1) \Leftrightarrow x = 2 + i - (-2 + i) = 4.$$

Fichtre! Une solution bien réelle alors que nous sommes passés par une mathématique hypothétique en introduisant ce sibyllin nombre i? Vérifions tout de même si cette valeur est bien solution de l'équation initiale :

$$x^3 = 4^3 = 64 \quad \text{et} \quad 15x + 4 = 15 \times 4 + 4 = 60 + 4 = 64.$$

La valeur trouvée est donc bien une solution! La mathématique créée pour l'occasion s'avère donc utile... Cela mérite développement!

Le nombre i telle que $i^2 = -1$, est alors inventé. Ce nombre n'est bien entendu pas réel.

L'ensemble de nombres obtenus par *combinaison linéaire* du nombre réel « 1 » et du nom *imaginaire* « i », c'est-à-dire des nombres de la forme $a \times 1 + b \times i$, où a et b sont réels, est alors défini.

1 L'ensemble $\mathbb{C}$

Définition

On appelle *nombre complexe* tout nombre de la forme : $z = a + ib$ où a et b sont deux nombres réels, et où $i^2 = -1$.

On dira alors que :

- a est la *partie réelle* de z , notée $\text{Re}(z)$;
- b est la *partie imaginaire* de z , noté $\text{Im}(z)$.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{C} = \{a + ib, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\} = \{a + ib, (a; b) \in \mathbb{R}^2\}.$$



La partie imaginaire ne contient pas le « i ».

Exemples :

1. $z_1 = 3 + i$ est un nombre complexe dont la partie réelle est et la partie imaginaire est
2. $z_2 = -i$ est un nombre complexe dont la partie réelle est et la partie imaginaire est
3. est un nombre complexe dont la partie réelle est et la partie imaginaire est

2 Opérations algébriques sur $\mathbb{C}$

Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle *conjugué* de z le nombre : $\bar{z} = a - ib$.

Propriété

Pour tout nombre complexe $z = a + ib$, $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$.

Démonstration

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Considérons les deux nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. On a alors,

- **la somme** : $z + z' = (a + a') + i(b + b')$;
- **le produit** : $z \times z' = (a + ib)(a' + ib')$
 $= aa' + iab' + iba' + bb'i^2$
 $= (aa' - bb') + i(ba' + ab')$;
- **l'opposé** : $-z = -a - ib$;
- **la différence** : $z - z' = z + (-z') = (a - a') + i(b - b')$;
- **l'inverse** : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$ avec $z \neq 0$;
- **le quotient** : $\frac{z}{z'} = \frac{z\bar{z'}}{z'z'} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2}i$, avec $z' \neq 0$.

Remarque : Il n'est pas demandé d'apprendre par cœur ces formules, mais juste de retenir les modes opératoires.

Propriété. Unicité

Soient $a + ib$ et $a' + ib'$ deux nombres complexes écrits sous la forme algébrique.

$$a + ib = a' + b'i \Leftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'.$$

Démonstration

[illegible]

Propriétés

Soient z et z' deux nombres complexes, $z' \neq 0$.

1. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

4. $\frac{\overline{z}}{z'} = \overline{\frac{z}{z'}}$

7. $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$

$$2. \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$$

5. $\overline{\overline{z}} = z$

8. $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

$$3. \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \overline{z^n} = \overline{z}^n$$

6. $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Démonstration

[illegible]

3 Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Propriété

Soient a et b deux nombres complexes. L'équation $az + b = 0$, d'inconnue z , admet pour solution dans $\mathbb{C}$:

$$z = -\frac{b}{a}, \quad \text{avec } a \neq 0.$$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $iz + (1 + i) = 0$.

Ainsi, $S = \{\dots\dots\dots\}$.

Propriété

Soient a , b et c trois nombres réels.

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Démonstration

Exemple : Le polynôme $z^2 + z + 1$ a pour discriminant $\Delta = -3$, donc ses racines sont :

$$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

4 La somme d'une suite géométrique

Propriété

Soit q un nombre complexe. Pour tout nombre entier naturel n , nous avons :

$$q^n - 1 = (q - 1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q^2 + q + 1). \quad (1)$$

Démonstration

Propriété

Soient a et b deux nombres complexes. Pour tout nombre entier naturel n , nous avons :

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}). \quad (2)$$

Démonstration

5 Formule du binôme de Newton

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle « factorielle » de n le nombre $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^n k$.
Par convention, on pose $0! = 1$.

Exemples : $1! = 1$ $2! = 2$ $3! = 6$ $4! = 24$ $5! = 120$ $6! = 720$ $7! = 5\,040$
 $8! = 40\,320$.

Propriété

$n!$ est le nombre de **permutations** d'un ensemble contenant n éléments.

Exemples :

— **Cas $n = 3$:** Il y a $3! = 6$ permutations possibles de 3 éléments.

123 132 213 231 312 321

— **Cas $n = 4$:** Il y a $4! = 24$ permutations possibles de 4 éléments.

1234 1243 1324 1342 1423 1432
2134 2143 2314 2341 2413 2431
3124 3142 3214 3241 3412 3421
4123 4132 4213 4231 4312 4321

$$- \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} = \frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}{(2n+1)!} = (2n+3)(2n+1).$$

$$- \frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!} = (n+1)n(n-1) + n = n^3.$$

Propriété. Arrangements (facultatif)

On dispose de n objets discernables. On en prélève successivement p les uns après les autres. Il y a :

- n choix possibles pour prélever le 1er objet ;
- $(n-1)$ choix possibles pour prélever le 2ème objet ;
- $(n-2)$ choix possibles pour prélever le 3ème objet ;
- ...
- $(n-p+1)$ choix possibles pour prélever le p ème objet.

On obtient ainsi $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1)$ prélèvements possibles, soit $\frac{n!}{(n-p)!}$.

C'est le nombre d'**arrangements** de p objets parmi n . On le note A_n^p .

Exemple : Un pronostic de tiercé ordonné (pari hippique) revient à désigner 3 numéros parmi n (effectif total des partants), soit A_n^3 .

Pour une course de 10 partants, il y a $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$ tiercés ordonnés possibles.

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{0, 1, \dots, n\}$. On désigne par *coefficient binomial* « k parmi n » le nombre :

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ et } n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n.$$

Il désigne par exemple le nombre de sous-ensembles à k éléments pris parmi n éléments distincts.

Exemples :

- $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins dans l'**arbre binaire** représentatif d'un schéma de n épreuves de Bernoulli conduisant à k succès.

— $\binom{n}{k}$ est le nombre de prélèvements simultanés (sans remise) de k objets parmi n .

Propriété.

Pour tout entier naturel n et pour tout entier $k \leq n$, on a :

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Démonstration

À l'aide de cette propriété, nous pouvons « construire » une visualisation des premiers coefficients binomiaux. Chaque nombre en noir est obtenu en ajoutant le nombre au-dessus et celui qui est à gauche du nombre au-dessus, comme le montre l'exemple du $6 = 3 + 3$ qui illustre l'égalité : $\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2}$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$

Propriété. Formule du binôme de Newton

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout entier naturel n et pour tout entier $k \leq n$, on a :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 4k \\ i & \text{si } n = 4k + 1 \\ -1 & \text{si } n = 4k + 2 \\ -i & \text{si } n = 4k + 3 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration

Propriété

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, et soit n un entier naturel. Alors,

$$z^n = (a + ib)^n$$

$$= \sum_{\substack{k=4p \\ k \leq n}} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k - \sum_{\substack{k=4p+2 \\ k \leq n}} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + i \left(\sum_{\substack{k=4p+1 \\ k \leq n}} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k - \sum_{\substack{k=4p+3 \\ k \leq n}} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right)$$

$$\text{où } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ avec } n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n.$$

Exemple : Calculons $(2 + 3i)^6$.

$$(2 + 3i)^6 = \sum_{\substack{k=4p \\ k \leq 6}} \binom{6}{k} 2^{6-k} 3^k - \sum_{\substack{k=4p+2 \\ k \leq 6}} \binom{6}{k} 2^{6-k} 3^k + i \left(\sum_{\substack{k=4p+1 \\ k \leq 6}} \binom{6}{k} 2^{6-k} 3^k - \sum_{\substack{k=4p+3 \\ k \leq 6}} \binom{6}{k} 2^{6-k} 3^k \right)$$

$$\begin{aligned}
(2 + 3i)^6 &= \binom{6}{0} 2^6 3^0 + \binom{6}{4} 2^{6-4} 3^4 - \binom{6}{2} 2^{6-2} 3^2 + \binom{6}{6} 2^{6-6} 3^6 i \left(\binom{6}{1} 2^{6-1} 3^1 + \binom{6}{5} 2^{6-5} 3^5 - \binom{6}{3} 2^{6-3} 3^3 \right) \\
&= 1 \times 2^6 + 15 \times 2^2 \times 3^4 - 15 \times 2^4 \times 3^2 + 1 \times 3^6 + i \left(6 \times 2^5 \times 3 + 6 \times 2^1 \times 3^5 - 20 \times 2^3 \times 3^3 \right) \\
&= 4924 - 2889 + i(3492 - 4320) \\
&= 2035 - 828i.
\end{aligned}$$