



1 Introduction

Dans divers domaines (mathématiques, SVT, science sociale et sciences physiques par exemple), certaines situations peuvent être représentées de façon schématique par un tableau de nombres.

En algèbre, le système linéaire :

$$\begin{cases} 3x + 5y = -1 \\ 2x - 7y = 11 \end{cases}$$

peut être représenté par les tableaux :

$$\begin{array}{|cc|} \hline \cdots & \cdots \\ \hline \cdots & \cdots \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|} \hline \cdots \\ \hline \cdots \\ \hline \end{array}$$

Le premier représente les coefficients respectifs de x et y et le second, les constantes à droite des signes « = ».

De tels tableaux sont appelés des *matrices*.

En général, on notera une matrice sans les traits du tableau, le tout entre parenthèses.

Les matrices correspondant au système de l'exemple précédente sont :

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}.$$

Exemple : Soit une matrice A ayant n lignes et m colonnes, $n \neq 0$ et $m \neq 0$.

On dira que $n \times m$ sont les dimensions de la matrice A .

- Si $n = 1$, on dira que A est une matrice ligne.
- Si $m = 1$, on dira que A est une matrice colonne.
- Si $n = m$, on dira que A est une matrice carrée.

On pourra noter une matrice :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}.$$

une matrice de dimensions $n \times m$, ou plus simplement : $A = (a_{i,j})$, avec $\dim(A) = n \times m$.

2 Opérations sur les matrices

2.1 Somme et différence

Propriété

Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de mêmes dimensions $\dim(A) = \dim(B) = n \times m$.

On définit la somme de A et B par la matrice :

$$S = A + B = (a_{i,j} + b_{i,j}) \quad , \quad \dim(S) = n \times m$$

et leur différence par la matrice :

$$D = A - B = (a_{i,j} - b_{i,j}) \quad , \quad \dim(D) = n \times m.$$

Exemple : Posons $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ deux matrices de dimensions 2×3 .

Elles ont les mêmes dimensions donc on peut les ajouter :

$$S = A + B = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

et les soustraire :

$$D = A - B = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 10 \\ -9 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Remarque : Quelle que soit la matrice A ,

$$A - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice est appelée la *matrice nulle*. C'est une matrice remplie de « 0 ».

2.2 Produit d'une matrice et d'un réel

Propriété

Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de dimensions $n \times m$ et $k \in \mathbb{R}$. On définit la matrice kA par :

$$kA = (ka_{i,j}) = \begin{pmatrix} ka_{1,1} & ka_{1,2} & \cdots & ka_{1,m} \\ ka_{2,1} & ka_{2,2} & \cdots & ka_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n,1} & ka_{n,2} & \cdots & ka_{n,m} \end{pmatrix}.$$

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $3A = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$.

On a multiplié tous les coefficients de A par 3.

2.3 Produit de matrices

Définition

Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice $n \times m$, et $B = (b_{i,j})$ une matrice $m \times p$. On définit le produit $A \times B$ par la matrice $C = (c_{i,j})$ de dimensions $n \times p$ telle que $c_{i,j} = \sum_{k=1}^m a_{i,k} \times b_{k,j}$.

Exemple : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 11 & -11 \\ 13 & -13 \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 22 & -22 \\ 64 & -64 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\dim(A) = 2 \times 3$, $\dim(B) = 3 \times 2$ et $\dim(C) = 2 \times 2$.

Remarque : Le produit matriciel n'est pas commutatif. En effet, $A \times B \neq B \times A$.

Cependant, il existe des cas où $A \times B = B \times A$.

Définition

On appelle *matrice identité d'ordre n* la matrice carrée de dimensions $n \times n$:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : Une matrice identité ne contient que des « 0 » sauf sur la diagonale où il n'y a que des « 1 ».

Définition

On appelle *matrices diagonales* toutes matrices carrées de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Propriété

Pour toute matrice carrée A d'ordre n ,

$$A \times I_n = I_n \times A = A.$$

Remarque : La matrice identité joue le même rôle dans le produit de matrices que le réel « 1 » dans le produit des nombres.

On dit que c'est l'*élément neutre* du produit.

2.4 Puissances d'une matrice carrée

Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre n . On définit la puissance p -ième de A par :

$$A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ facteurs}}$$

en convenant d'avoir : $A^0 = I_n$.

Propriété

Soit $D = (d_i)$ une matrice carrée diagonale d'ordre n . Alors,

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow D^p = \begin{pmatrix} a_1^p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3^p & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n^p \end{pmatrix}.$$

La démonstration peut se faire par récurrence.

3 Matrice inverse d'une matrice carrée

Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre n .

On appelle *matrice inverse de A* l'unique matrice, notée A^{-1} , telle que :

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n.$$

Exemple : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 puis déduire A^{-1} .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

On dit dans ce cas que la matrice n'est pas inversible.

Considérons le système linéaire :

$$\begin{cases} ax + by = \lambda \\ cx + dy = \mu \end{cases}$$

Il peut être représenté de façon matricielle par :

$$AX = B, \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}.$$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $ad - bc \neq 0$. Alors, l'inverse de A est :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Résolution de systèmes linéaires :

Considérons un système linéaire de n équations à n inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

Alors, ce système peut être écrit de façon matricielle sous la forme :

$$AX = B$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, si A est inversible,

$$AX = B \Leftrightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{=I_n} X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 3x - 5y = 13 \\ 4x + 7y = -10 \end{cases}$$

4 Suites numériques imbriquées

Définition

On pose : $U_n = \begin{pmatrix} u_n^{(1)} \\ u_n^{(2)} \\ \vdots \\ u_n^{(p)} \end{pmatrix}$ où les $u_n^{(k)}$ ($1 \leq k \leq p$) sont p suites numériques.

Ces p suites sont dites imbriquées s'il existe deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

telles que :

$$U_{n+1} = AU_n + B.$$

Exemple : Les deux suites u_n et v_n définies par :

$$u_0 = a, \ v_0 = b \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - v_n) \end{cases}$$

sont imbriquées car :

.....

.....

.....

.....

.....

Théorème

Soit un système de suites imbriquées représenté par l'écriture matricielle $U_{n+1} = AU_n$, U_0 étant donné. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = A^n U_0.$$

Exemple : Si on reprend les suites de l'exemple précédent, alors :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

On peut démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$A^{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \times 2^n I_2 = \frac{1}{2^n} I_2;$$

$$- A^{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1}} \times 2^n A = \frac{1}{2^n} A.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n ,

$$- U_{2n} = \frac{1}{2^n} \binom{a}{b};$$

$$- U_{2n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} \binom{a+b}{a-b}.$$

[illegible]