

[illegible]

3 Ordre et chaine d'un graphe

Définition

L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe.

Exemple. L'ordre du graphe de notre exemple est égal à 4.

Définition

Une chaîne d'un graphe est une liste ordonnée de sommets adjacents deux à deux.
Le nombre de sommets de cette liste est appelé la *longueur* de la chaîne.

Exemple. Dans l'exemple de départ,

- $M - S - A - L$ est une chaîne de longueur 4.
- $A - M - S$ est une chaîne de longueur 3.

4 Différents types de graphes

Définition

Un graphe est dit *connexe* si deux sommets quelconques de ce graphe peuvent être reliés par au moins une chaîne.

Il est assez facile de voir si un graphe est connexe ou non : si sa représentation comporte au moins un sommet isolé alors il n'est pas connexe.

Définition

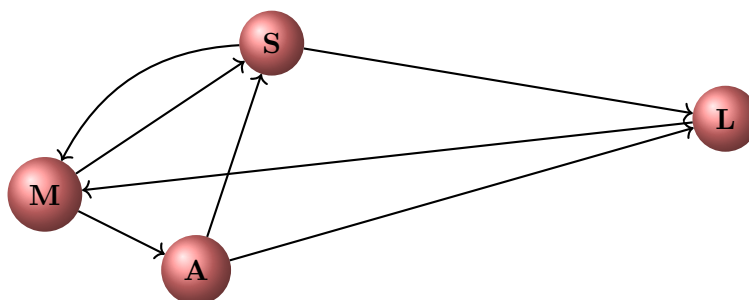
Un graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{S}; \mathcal{A})$ est *non orienté* si les couples de $\mathcal{A}$ peuvent être inversés.

Exemple. Dans notre exemple précédent, Maria peut aller de la maison de Sara à celle de Lucie, mais aussi de la maison de Lucie à celle de Sara : il n'y a pas de sens imposé.
Le graphe représentant la situation est non orienté.

Définition

Un graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{S}; \mathcal{A})$ est *orienté* si les couples de $\mathcal{A}$ ne peuvent pas être inversés.

Exemple. Supposons que dans notre exemple de départ, Maria ne puisse pas aller de S à A mais uniquement de A à S , et qu'il y ait d'autres contraintes du même type.
Supposons que la représentation de la situation soit alors celle-ci :

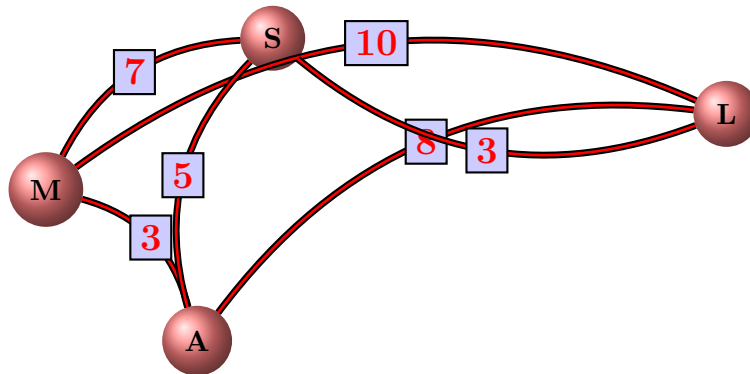


Nous avons alors ici la représentation d'un graphe orienté.

Définition

Un graphe est dit *pondéré* si ses arêtes sont munies de nombres positifs, appelés *étiquettes* ou *pondérations*.

Exemple. Ceci est la représentation d'un graphe pondéré. Ici, les pondérations représentent la distance (en kilomètre) entre chaque maison représentées par les sommets.



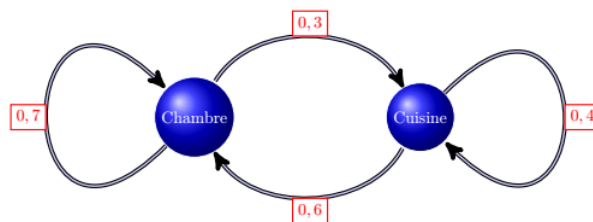
Définition

Un graphe probabiliste est un graphe orienté où la somme des pondérations des arêtes issues d'un même sommet est égale à 1.

Exemple. Pendant les vacances, Sara est soit dans sa chambre, soit dans la cuisine.

- Si elle est dans sa chambre, la probabilité qu'elle y soit encore 10 minutes plus tard est égale à 0,7.
- Si elle est dans la cuisine, la probabilité qu'elle y soit encore 10 minutes plus tard est égale à 0,4.

Cette situation peut alors correspondre à un graphe dont une représentation est la suivante :



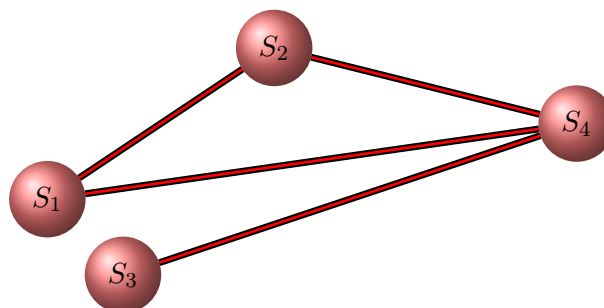
Définition

Soit $\mathcal{G}$ un graphe non pondéré, de sommets S_k , $1 \leq k \leq n$.

La *matrice d'adjacence* de $\mathcal{G}$ est la matrice $(a_{i,j})$, $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$ telle que :

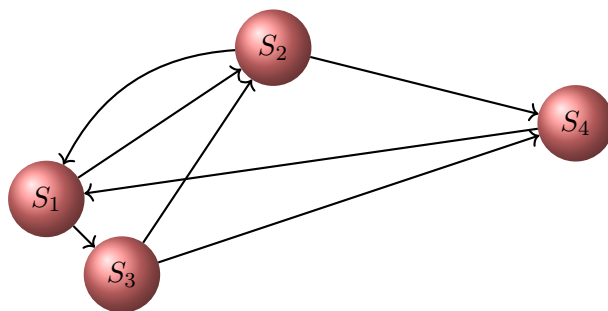
- s'il existe une arête allant de S_i à S_j alors $a_{i,j} = 1$;
- sinon, $a_{i,j} = 0$.

Exemple. Graphe non orienté



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple. Graphe orienté



En convenant de classer les sommets dans cet ordre, on obtient :

$$S_1 - S_3 - S_2 - S_4$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Propriété

La matrice d'adjacence $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ d'un graphe non orienté d'ordre n est symétrique : pour tous i et j compris entre 1 et n ,

$$a_{i,j} = a_{j,i}.$$

Propriété

Soit $\mathcal{G}$ un graphe non pondéré d'ordre n de matrice d'adjacence $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.

On note S_k les sommets de $\mathcal{G}$.

Le nombre de chaînes de longueur k reliant S_i à S_j est le coefficient $c_{i,j}$ de la matrice A^k .

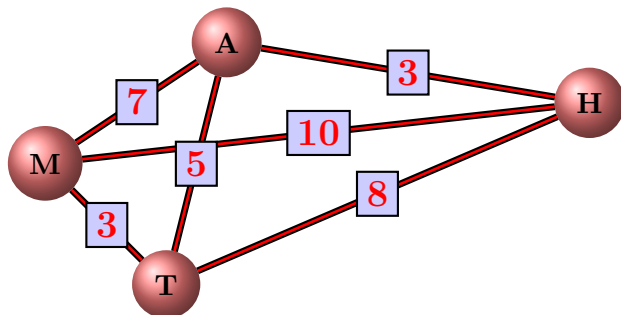
Exemple. On considère le graphe orienté présenté par la matrice A .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \textcolor{red}{1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors qu'il existe une chaîne de longueur 3 reliant S_2 à S_3 .

Définition

La matrice $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ d'un graphe pondéré ou probabiliste est la matrice telle que $a_{i,j}$ correspond à la pondération de l'arête reliant le sommet i au sommet j .



Exemple.

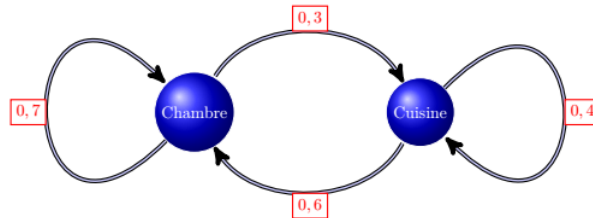
En convenant d'ordonner les sommets de la manière suivante :

$$M - A - T - H$$

la matrice d'adjacence du graphe ci-contre est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 & 10 \\ 7 & 0 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 0 & 8 \\ 10 & 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple. Graphe probabiliste



En convenant d'ordonner les sommets du graphe ci-contre comme ceci :

Chambre – Cuisine

la matrice du graphe ci-contre est :

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

5 Chaîne de Markov

Définition

Une chaîne de Markov est une suite d'événements $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où chaque X_n ne dépend que de X_{n-1} , pour $n > 0$

Définition

Soit $\mathcal{G}$ un graphe probabiliste de matrice M .

L'état stable du graphe est la matrice ligne $P = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)$ telle que $P = PM$, avec $\sum_{k=1}^n x_k = 1$.

Exemple. L'exemple précédent illustre ce que l'on appelle une *chaîne de Markov* à deux états : « Chambre » et « Cuisine ».

L'état stable de ce graphe est la matrice $P = (a \ b)$ telle que :

$$\begin{aligned} P &= PM \Leftrightarrow PI_2 = PM \\ &\Leftrightarrow P(M - I_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7-1 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4-1 \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad a + b = 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -0,3a + 0,6b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

L'état stable du graphe est donc $P = \left(\frac{2}{3} \ \frac{1}{3}\right)$.

Cela signifie que la probabilité que Sara soit dans sa chambre est égale à $\frac{2}{3}$.