2

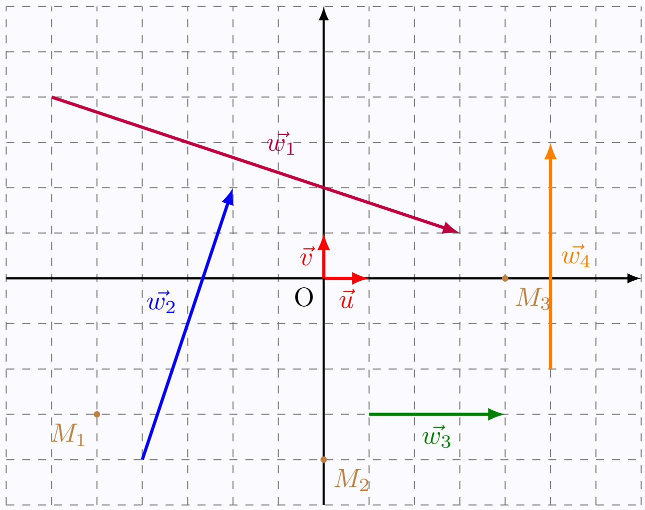
Corrigés

Nombre complexes : Point de vue géométrique

Série d'exercices — Classe : Maths Expertes — Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

Donner l'affixe des points et vecteurs de la figure ci-dessous :



— L'affixe de $\vec{w_1}$ est : $9-3\mathrm{i}$.
— L'affixe de $\vec{w_2}$ est : $2+6\mathrm{i}$.
— L'affixe de $\vec{w_3}$ est : $3+0\mathrm{i}=3$.
— L'affixe de $\vec{w_4}$ est : $0+5\mathrm{i}=5\mathrm{i}$.
— L'affixe de M_1 est : $-5-3\mathrm{i}$.
— L'affixe de M_2 est : $0-4\mathrm{i}=-4\mathrm{i}$.
— L'affixe de M_1 est : $4+0\mathrm{i}=4$.

Exercice n°2

a) $|\mathrm{i}|=1$ car l'image de i est le point de coordonnées $(0;1)$ et la distance qui le sépare de l'origine du repère est égale à 1.

b) $|1+\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

c) $|1-\mathrm{i}|=|\overline{1-\mathrm{i}}|=|1+\mathrm{i}|=\sqrt{2}$.

d) $|-3+2\mathrm{i}|=\sqrt{(-3)^3+2^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$.

e) $|-4|=4$ car la distance qui sépare O du point image de $z=-4$ est égale à 4. On s'aperçoit d'ailleurs ici que le module est égal à la valeur absolue quand le complexe est réel.

f) $|3+4\mathrm{i}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$.

g) $|5-2\mathrm{i}|=\sqrt{5^2+(-2)^2}=\sqrt{29}$.

h) $|4{,}5+6\mathrm{i}|=\sqrt{(4{,}5)^2+6^2}=\sqrt{56{,}25}=7{,}5$.

Exercice n°3

1. $\left|(1+\mathrm{i})^{16}\right|=|1+\mathrm{i}|^{16}=\left(\sqrt{2}\right)^{16}=2^8=256$.
2. $\left|(2-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})\right|=|2-\mathrm{i}|\times|1+\mathrm{i}|=\sqrt{4+1}\times\sqrt{2}=\sqrt{10}$.
3. $\left|\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right|=\dfrac{|1-\mathrm{i}|}{|1+\mathrm{i}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$.
4. $(5-3\mathrm{i})(5+3\mathrm{i})=|5+3\mathrm{i}|^2=5^2+3^2=34$.

Exercice n°4

1. $z_1=1+\mathrm{i}$.
$|z_1|=\sqrt{2}$. On factorise alors z_1 par $\sqrt{2}$:

$$z_1=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Un argument θ de z_1 est donc tel que :

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\qquad\text{soit}\qquad\theta=\frac{\pi}{4}\quad[2\pi].$$

Finalement,

$$\boxed{z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right).}$$

2. $z_2=2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$.
$|z_2|=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2}=\sqrt{12+4}=4$. Alors,

$$z_2=4\left(\frac{2\sqrt{3}}{4}+\frac{2}{4}\mathrm{i}\right)=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right).$$

$$\theta=\arg(z_2)\iff\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{1}{2}\end{cases}\iff\theta=\frac{\pi}{6}\quad[2\pi].$$

Finalement,

$$\boxed{z_2=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right).}$$

3. $z_3=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$.
4. $z_4=-2+2\mathrm{i}$.
$|z_4|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. Alors,

$$z_4=2\sqrt{2}\left(-\frac{2}{2\sqrt{2}}+\frac{2}{2\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$\theta=\arg(z_4)\iff\begin{cases}\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

$$\iff\theta=\frac{3\pi}{4}\ [2\pi].$$

Finalement,

$$\boxed{z_4=2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right].}$$

Exercice n°5

1. $|z_1| = |1+\mathrm{i}|^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 = 4.$
   $\arg(z_1) = \arg\left[(1+\mathrm{i})^4\right] = 4\arg(1+\mathrm{i}) = 4 \times \dfrac{\pi}{4} \mod 2\pi = \pi \mod 2\pi.$
   Donc $z_1 = 4\big(\cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi)\big) = 4(-1+\mathrm{i}\times 0)$, soit $\boxed{z_1 = -4}$.
2. $\left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right| = \dfrac{|1+\mathrm{i}|}{|1-\mathrm{i}|} = 1.$
   $\arg\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right) = \arg(1+\mathrm{i}) - \arg(1-\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{4} - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{2} \mod 2\pi.$
   On en déduit alors que $z_2 = \cos\dfrac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}$, soit $\boxed{z_2 = \mathrm{i}}$.

Exercice n°6

1. $z = \cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}$,
   et $z' = \cos\dfrac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.
   Ainsi, $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}$.
   De plus, $|z| = |z'| = 1$ donc $|zz'| = 1$.
   Finalement,
   $$\boxed{zz' = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}.$$
2. $z = \cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$
   $z' = \cos\dfrac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}.$
   Par conséquent,
   $$\begin{aligned} zz' &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{i} + \frac{\sqrt{6}}{4}\mathrm{i} + \frac{\sqrt{6}}{4} \\ zz' &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\mathrm{i}. \end{aligned}$$
3. Des questions précédentes, on déduit :
   $$zz' = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\mathrm{i}$$
   et donc :
   $$\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}.$$

Exercice n°7

Le polynôme $z^2 + z + 1$ a pour discriminant :
$$\Delta = -3$$
donc ses racines sont :
$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = e^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$$
et son conjugué :
$$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = e^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}.$$
Or, par définition, j est une racine de ce polynôme : c'est celle dont la partie imaginaire est strictement positive, donc $\mathrm{j} = e^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$.

Ainsi, l'autre racine correspond à $\bar{\mathrm{j}}$, ce qui justifie que $\bar{\mathrm{j}}^{\,2} + \bar{\mathrm{j}} + 1 = 0$.

Exercice n°8

1. $$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2}\mathrm{i}z_0 + 1 - \mathrm{i} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{i}\times\mathrm{i} + 1 - \mathrm{i} \\ &= -\frac{1}{2} + 1 - \mathrm{i} \\ &= \frac{1}{2} - \mathrm{i}. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} z_2 &= \frac{1}{2}\mathrm{i}z_1 + 1 - \mathrm{i} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{i}\times\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\right) + 1 - \mathrm{i} \\ &= \frac{1}{4}\mathrm{i} + \frac{1}{2} + 1 - \mathrm{i} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{3}{4}\mathrm{i}. \end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned} v_{n+1} &= z_{n+1} - \frac{6}{5} + \frac{2}{5}\mathrm{i} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{i}z_n + 1 - \mathrm{i} - \frac{6}{5} + \frac{2}{5}\mathrm{i} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{i}z_n - \frac{1}{5} - \frac{3}{5}\mathrm{i} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{i}\left(z_n - \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}\mathrm{i}} - \frac{\frac{3}{5}\mathrm{i}}{\frac{1}{2}\mathrm{i}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{i}\left(z_n + \frac{2}{5}\mathrm{i} - \frac{6}{5}\right) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{i}v_n. \end{aligned}$$
   Ainsi, $(v_n)_n$ est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ et de premier terme :
   $$\begin{aligned} v_0 &= z_0 - \frac{6}{5} + \frac{2}{5}\mathrm{i} \\ v_0 &= -\frac{6}{5} + \frac{7}{5}\mathrm{i}. \end{aligned}$$
3. On déduit de la question précédente que :
   $$v_n = v_0 \times q^n = \left(-\frac{6}{5} + \frac{7}{5}\mathrm{i}\right) \times \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n$$
   et donc :
   $$z_n = v_n + \frac{6}{5} - \frac{2}{5}\mathrm{i} = \left(-\frac{6}{5} + \frac{7}{5}\mathrm{i}\right) \times \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n + \frac{6}{5} - \frac{2}{5}\mathrm{i}$$
4. $|v_n| = |v_0| \times \left|\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right|^n = |v_0| \times \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{|v_0|}{2^n}.$
   Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} |v_n| = 0.$
   On peut alors en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0.$
   Or, $z_n = v_n + \dfrac{6}{5} - \dfrac{2}{5}\mathrm{i}$ donc :
   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} z_n = \frac{6}{5} - \frac{2}{5}\mathrm{i}}.$$

Exercice n°9

— $\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$

$$\iff \cos\frac{\pi}{4} = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$$
$$\iff \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$$
$$\iff \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}+2}{4}$$
$$\iff \boxed{\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}}.$$

— $\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$$\iff \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$
$$\iff \sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$
$$\iff \boxed{\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}.$$

On prend ici la valeur positive du sinus et du cosinus car $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$.

Exercice n°10

Remarquons que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$. Ainsi,

— $$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$$

— $$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Exercice n°11

1. $$(1+\mathrm{i})^9 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^9$$
$$= 16\sqrt{2}\left(\cos\frac{9\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{4}\right)$$
$$= 16\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= 16\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$(1+\mathrm{i})^9 = 16 + 16\mathrm{i}.$$

2. $$(\sqrt{3}-\mathrm{i})^6 = \left[2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\right]^6$$
$$= \left[2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right]^6$$
$$= 2^6\big(\cos(-\pi) + \mathrm{i}\sin(-\pi)\big)$$
$$(\sqrt{3}-\mathrm{i})^6 = -64.$$

3. $$(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^9 = \left[2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\right]^9$$
$$= \left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}\mathrm{i}\sin+\frac{\pi}{3}\right)\right]^9$$
$$= 2^9\left(\cos\frac{9\pi}{3}\mathrm{i}\sin+\frac{9\pi}{3}\right)$$
$$= 512\big(\cos(3\pi) + \mathrm{i}\sin(3\pi)\big)$$
$$= 512\big(\cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi)\big)$$
$$(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^9 = -512.$$

Exercice n°12

Nous allons ici avoir besoin du binôme de Newton, et plus particulièrement du développement :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$\cos^3(x) = \left(\frac{e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^3$$
$$= \frac{e^{3\mathrm{i}x} + 3e^{2\mathrm{i}x}e^{-\mathrm{i}x} + 3e^{\mathrm{i}x}e^{-2\mathrm{i}x} + e^{-3\mathrm{i}x}}{8}$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{e^{3\mathrm{i}x}+e^{-3\mathrm{i}x}}{2} + 3\frac{e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}}{2}\right]$$
$$\cos^3(x) = \frac{1}{2}\left[\cos(3x) + 3\cos(x)\right]$$
$$\cos^3(x) = \frac{1}{2}\cos(3x) + \frac{3}{2}\cos(x).$$

Exercice n°13

Nous allons ici avoir besoin du binôme de Newton, et plus particulièrement du développement :

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.$$

$$\sin^5(x)$$
$$= \left(\frac{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^5$$
$$= \frac{e^{5\mathrm{i}x} - 5e^{4\mathrm{i}x}e^{-\mathrm{i}x} + 10e^{3\mathrm{i}x}e^{-2\mathrm{i}x} - 10e^{2\mathrm{i}x}e^{-3\mathrm{i}x} + 5e^{\mathrm{i}x}e^{-4\mathrm{i}x} - e^{-5\mathrm{i}x}}{32\mathrm{i}}$$
$$\frac{1}{16}\left[\frac{e^{5\mathrm{i}x}-e^{-5\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} - 5\frac{e^{3\mathrm{i}x}-e^{-3\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} + 10\frac{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right]$$
$$= \frac{1}{16}\big(\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x)\big)$$
$$= \frac{1}{16}\sin(5x) - \frac{5}{16}\sin(3x) + \frac{5}{8}\sin(x).$$

Ainsi,
$$\sin^5(x) = \frac{1}{16}\sin(5x) - \frac{5}{16}\sin(3x) + \frac{5}{8}\sin(x).$$

Exercice n°14

Par définition,

$$\begin{aligned} z_n &= (\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0) + \big(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)\big) + \cdots + \big(\cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx)\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{k\mathrm{i}x}. \end{aligned}$$

On va ici utiliser la formule :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad , \quad q \neq 1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{e^{(n+1)\mathrm{i}x} - 1}{e^{\mathrm{i}x} - 1} \\ &= \frac{e^{(n+1)\mathrm{i}\frac{x}{2}}\left[e^{(n+1)\mathrm{i}\frac{x}{2}} - e^{-(n+1)\mathrm{i}\frac{x}{2}}\right]}{e^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}\left[e^{\mathrm{i}\frac{x}{2}} - e^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}}\right]} \\ &= e^{n\mathrm{i}\frac{x}{2}} \times \frac{\cancel{2\mathrm{i}}\sin\left[(n+1)\frac{x}{2}\right]}{\cancel{2\mathrm{i}}\sin\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$C_n = \Re(z_n) = \cos\left(n\frac{x}{2}\right)\frac{\sin\left[(n+1)\frac{x}{2}\right]}{\sin\frac{x}{2}}$$

et

$$S_n = \Im(z_n) = \sin\left(n\frac{x}{2}\right)\frac{\sin\left[(n+1)\frac{x}{2}\right]}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Exercice n°15

Posons $z = e^{\mathrm{i}\theta}$.
On sait que : $z^3 = 1 \iff |z|^3 = 1 \iff |z| = 1$.
Alors,

$$z^3 = 1 \iff e^{3\mathrm{i}\theta} = e^{\mathrm{i}(0+2k\pi)}, k \in \mathbb{Z} \iff \theta = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

- Si $k = 3p$, $p \in \mathbb{Z}$, $z = e^{\mathrm{i}\times 2p\pi} = 1$;
- si $k = 3p+1$, $z = e^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3}+2p\pi\right)} = e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} = \mathrm{j}$;
- si $k = 3p+2$, $z = e^{\mathrm{i}\left(\frac{4\pi}{3}+2p\pi\right)} = e^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}} = e^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} = \bar{\mathrm{j}}$.

Finalement, il n'y a que trois complexes dont le cube est égal à 1 : 1, $\mathrm{j} = e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ et $\bar{j} = e^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.

Exercice n°16

Rappelons que l'écriture exponentielle d'un nombre complexe est $re^{\mathrm{i}\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}_+$.

1. $3\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\pi}$ n'est pas une forme complexe car $3\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$. On doit alors modifier cela :

$$3\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\pi} = 3e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}e^{\mathrm{i}\pi} = 3e^{\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}}.$$

2. $-2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ n'est pas une écriture exponentielle car $-2 \notin \mathbb{R}_+$.

$$-2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 2e^{\mathrm{i}\pi}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 2e^{\frac{4\pi}{3}\mathrm{i}}.$$

3. $\pi e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ est l'écriture exponentielle du nombre complexe de module $\pi \in \mathbb{R}_+$ et dont un argument est $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.
4. $5 = 5e^{0\mathrm{i}}$ donc c'est bien une forme exponentielle du nombre complexe de module 5 et dont un argument est 0.
5. $4e^{\frac{\pi}{5}} = 4e^{\frac{\pi}{5}}e^{0\mathrm{i}}$ est bien l'écriture exponentielle du nombre complexe de module $4e^{\frac{\pi}{5}}$ et dont un argument est 0.
6. $-\pi$ n'est pas une écriture exponentielle :

$$-\pi = \pi e^{\mathrm{i}\pi}$$

représente le nombre complexe de module π et dont un argument vaut π.

Exercice n°17

1. On a :

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} &= \frac{e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\left(e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)}{e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}\left(e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}} - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}\right)} \\ &= \frac{e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}} \times \frac{2\mathrm{i} \times \frac{e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{2\mathrm{i}}}{2\mathrm{i} \times \frac{e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}} - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}}{2\mathrm{i}}} \\ &= e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{24}} \times \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{8}} \\ &= e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{24}} \times \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}} \\ \frac{1 - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} &= \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{24}}. \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} &= \frac{1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)}{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

(on a multiplié par le conjugué du dénominateur)

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} + \mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{4}\right)}{\frac{4-4\sqrt{2}+2+2}{4}} \\ &= \left(\frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}\mathrm{i}\right) \times \frac{4}{8-4\sqrt{2}} \\ &= \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8-4\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{8-4\sqrt{2}}\mathrm{i} \times \frac{8+4\sqrt{2}}{8+4\sqrt{2}} \\ \frac{1 - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} &= \frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4} + \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

3. Des questions 1 et 2, on déduit l'égalité suivante :

$$\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4} + \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4}\mathrm{i} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{24}}$$

soit :

$$e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{24}} = \sqrt{2+\sqrt{2}}\left(\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4} + \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right)$$

D'où :

$$\cos\frac{\pi}{24} = \sqrt{2-\sqrt{2}} \times \frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{(2-\sqrt{2})(1+\sqrt{3}+\sqrt{6})^2} = \frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}.$$

et :

$$\sin\frac{\pi}{24} = \sqrt{2-\sqrt{2}} \times \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{(2-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} = \frac{1}{4}\sqrt{8-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}.$$

Exercice n°18

Nous savons que :

$$\mathrm{i} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}.$$

Par conséquent,

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \left(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right)^{\mathrm{i}} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\times\mathrm{i}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \in \mathbb{R}.$$

Exercice n°19

1. $w^5 = \left(e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}\right)^5 = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}\times 5} = e^{2\mathrm{i}\pi} = 1.$

$$1+w+w^2+w^3+w^4 = \frac{w^5-1}{w-1} = 0.$$

2. On développe le second membre de l'égalité :

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + \left(z+\frac{1}{z}\right) - 1 = z^2+2+\frac{1}{z^2}+z+\frac{1}{z}-1 = z^2+\frac{1}{z^2}+z+\frac{1}{z}+1.$$

Or,

$$\frac{1}{z^2}\left(1+z+z^2+z^3+z^4\right) = \frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2.$$

On a donc bien :

$$\boxed{\frac{1}{z^2}\left(1+z+z^2+z^3+z^4\right) = \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + \left(z+\frac{1}{z}\right) - 1}$$

3. (a) Le polynôme Z^2+Z-1 a pour discriminant :

$$\Delta = 1^2 - 4\times 1\times(-1) = 5.$$

Il admet donc deux racines réelles distinctes :

$$Z_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

(b) D'après la question 1,

$$1+w+w^2+w^3+w^4 = 0\ ,$$

donc

$$\frac{1}{w^2}\left(1+w+w^2+w^3+w^4\right) = 0\ ,$$

soit, d'après la question 2 :

$$\left(w+\frac{1}{w}\right)^2 + \left(w+\frac{1}{w}\right) - 1 = 0.$$

ou encore :

$$\left(e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} + e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}\right)^2 + \left(e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} + e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}\right) - 1 = 0.$$

Or,

$$e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} + e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} = \cos\frac{2\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{5} + \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = 2\cos\frac{2\pi}{5}.$$

Donc,

$$\left(2\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2 + 2\cos\frac{2\pi}{5} - 1 = 0. \qquad (1)$$

$2\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation $Z^2+Z-1=0$ donc, d'après la question précédente :

$$2\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad 2\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ ,$$

soit :

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \quad \text{ou} \quad \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Or, $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$ car $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ d'où :

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}}.$$

Exercice n°20

1. $z^3-27 = z^3-3^3 = \underline{(z-3)(z^2+3z+9)}.$

2. $z^5-\mathrm{i} = z^5-\mathrm{i}^5 = (z-\mathrm{i})(z^4+\mathrm{i}z^3+\mathrm{i}^2z^2+\mathrm{i}^3z+\mathrm{i}^4) = \underline{(z-\mathrm{i})(z^4+\mathrm{i}z^3-z^2-\mathrm{i}z+1)}.$

3. $z^4-4 = \left(z^4-(\sqrt{2})^4\right) = \left(z-\sqrt{2}\right)\left(z^3+\sqrt{2}z^2+(\sqrt{2})^2z+(\sqrt{2})^3\right) = \underline{\left(z-\sqrt{2}\right)\left(z^3+\sqrt{2}z^2+2z+2\sqrt{2}\right)}.$

4. z^6+64

$$= z^6-(2\mathrm{i})^6 = (z-2\mathrm{i})\left(z^5+2\mathrm{i}z^4+(2\mathrm{i})^2z^3+(2\mathrm{i})^3z^2+(2\mathrm{i})^4z+(2\mathrm{i})^5\right) = \underline{(z-2\mathrm{i})\left(z^5+2\mathrm{i}z^4-4z^3-8\mathrm{i}z^2+16z+32\mathrm{i}\right)}.$$

Exercice n°21

$P(z)=\frac{1}{2}z^3+5z+\frac{11}{2}$ donc :

$$P(1)=\frac{1}{2}\times 1^3+5\times 1+\frac{11}{2}=\frac{1}{2}+\frac{10}{2}-\frac{11}{2}=0.$$

On en déduit alors que :

$$P(z)=(z+1)(az^2+bz+c).$$

En développant, on obtient :

$$P(z)=az^3+(a+b)z^2+(b+c)z+c.$$

L'identification les coefficients, imlique :

$$\begin{cases} a &= \frac{1}{2} \\ a+b &= 0 \\ b+c &= 5 \\ c &= \frac{11}{2} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \\ c=\frac{11}{2} \end{cases}.$$

Ainsi,

$$P(z)=(z+1)\left(\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{2}z+\frac{11}{2}\right).$$

Le discriminant de $\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{2}z+\frac{11}{2}$ est :

$$\Delta=-\frac{43}{4}$$

donc ses racines complexes sont :

$$z_1=\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{43}}{2}\mathrm{i}}{2\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{43}}{2} \quad \text{et} \quad z_2=\overline{z_1}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{43}}{2}\mathrm{i}.$$

Les solutions de l'équation $P(z)=0$ sont donc -1, z_1 et z_2.

Exercice n°22

$$z^4+3z^3-z-3=0. \qquad \text{(E)}$$

1. En remplaçant z par -3 dans le membre de gauche de (E), on obtient :

$$\begin{aligned}(-3)^4+3(-3)^3-(-3)-3&=81-81+3-3\\&=0.\end{aligned}$$

Ainsi, -3 est bien solution de (E).

On peut alors en déduire que :

$$z^4+3z^3-z-3=(z+3)Q(z).$$

2. Cette question, consistant à trouver nous-même une solution de (E), nous pousse à nous dire qu'il en existe une évidente. Commençons donc par remplacer z par 1 :

$$\begin{aligned}1^4+3\times 1^3-1-3&=1+3-1-3\\&=0.\end{aligned}$$

Donc 1 est solution de (E).

3. On sait que :

$$1+z+z^2=\frac{z^3-1}{z-1}$$

donc :

$$z^4+3z^3-z-3=(z+3)(z-1)(z^2+z+1).$$

Les racines de z^2+z+1 sont :
$\mathrm{j}=e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ et $\bar{\mathrm{j}}=e^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}=e^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}}=\mathrm{j}^2$.

Ainsi, les solutions de l'équation (E) sont :

$$-3\,;\,1\,;\,\mathrm{j}\,;\,\mathrm{j}^2.$$

Exercice n°23

Le discriminant de $3\mathrm{i}z^2+2z+\mathrm{i}$ est :

$$\Delta=2^2-4\times 3\mathrm{i}\times\mathrm{i}=4-12\mathrm{i}^2=4+12=16.$$

Il y a donc deux solutions à (E) :

$$z_1=\frac{-2-\sqrt{16}}{2\times 3\mathrm{i}}=-\frac{1}{\mathrm{i}}=-\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}=\mathrm{i}$$

et

$$z_2=\frac{-2+\sqrt{16}}{2\times 3\mathrm{i}}=\frac{1}{3\mathrm{i}}=-\frac{1}{3}\mathrm{i}.$$

Exercice n°24

On souhaite résoudre l'équation :

$$2z^2-3z+3-\mathrm{i}=0. \qquad \text{(E)}$$

1. $(a+\mathrm{i}b)^2=-15+8\mathrm{i} \iff a^2-b^2+2ab\mathrm{i}=-15+8\mathrm{i}$

$$\iff \begin{cases} a^2-b^2 &= -15 \\ 2ab &= 8 \end{cases}$$

De la seconde égalité, on peut écrire :

$$b=\frac{4}{a}$$

et déduire, à partir de la première :

$$a^2-\frac{16}{a^2}=-15 \iff a^4+15a^2-16=0.$$

En posant $x=a^2$, on a : $x^2+15x-16=0$, de racine évidente $x_1=1$ et donc de seconde racine $x_2=\frac{c}{a}=-16$.
Ainsi, $a^2=1$, soit $a=1$ ou $a=-1$, ou $a^2=16$, soit $a=4$ ou $a=-4$.
— Si $a=1$, $b=4$; dans ce cas, $(a+\mathrm{i}b)^2=(1+4\mathrm{i})^2=-15+8\mathrm{i}$.
— Si $a=-1$, $b=-4$; dans ce cas, $(a+\mathrm{i}b)^2=(-1-4\mathrm{i})^2=-15+8\mathrm{i}$.
— Si $a=4$, $b=1$; dans ce cas, $(a+\mathrm{i}b)^2=(4+\mathrm{i})^2=15+8\mathrm{i}$.
— Si $a=-4$, $b=-1$; dans ce cas, $(a+\mathrm{i}b)^2=(-4-\mathrm{i})^2=15+8\mathrm{i}$.

Nous voyons alors qu'il n'y a que deux possibilités : $1+4\mathrm{i}$ et $-1-4\mathrm{i}$.

2. Le discriminant de $2z^2-3z+3-\mathrm{i}$ est :

$$\Delta=(-3)^2-4\times 2\times(3-\mathrm{i})=9-24+8\mathrm{i}=-15+8\mathrm{i}.$$

Les deux solutions complexes de (E) sont alors :

$$z_1 = \frac{3-\sqrt{-15+8\mathrm{i}}}{4} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{3+\sqrt{-15+8\mathrm{i}}}{4}.$$

Or, $(1+4\mathrm{i})^2 = -15+8\mathrm{i}$ et $(-1-4\mathrm{i})^2 = -15+8\mathrm{i}$ donc $\sqrt{-15+8\mathrm{i}} = 1+4\mathrm{i}$ et $\sqrt{-15+8\mathrm{i}} = -1-4\mathrm{i}$.

— Si $\sqrt{-15+8\mathrm{i}} = 1+4\mathrm{i}$,

$$z_1 = \frac{3-(1+4\mathrm{i})}{4} = \frac{2-4\mathrm{i}}{4} = \frac{1}{2}-\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{3+(1+4\mathrm{i})}{4} = 1+\mathrm{i}.$$

— Si $\sqrt{-15+8\mathrm{i}} = -1-4\mathrm{i}$,

$$z_1 = \frac{3-(-1-4\mathrm{i})}{4} = 1+\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{3+(-1-4\mathrm{i})}{4} = \frac{1}{2}-\mathrm{i}.$$

Finalement, les deux solutions de (E) sont $1+\mathrm{i}$ et $\frac{1}{2}-\mathrm{i}$.