Corrigés

Série d'exercices — Classe : Maths Expertes — Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

1. $\dim(A) = \dim(C) = 2 \times 3$.
   $\dim(B) = \dim(D) = 3 \times 2$.
2. Les seules sommes que l'on peut faire avec ces matrices sont :
   — $A + C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   $$= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
   — $B + D = B + (-B) = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $B + 2D = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$.
   $$= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -4 & 2 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} = D$$
   On aurait aussi pu écrire :
   $$B + 2D = B + 2(-B) = B - 2B = -B = D \cdot,$$

Exercice n°2

$$A \times B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}.$$
$$B \times A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 11 & -7 \end{pmatrix}.$$
On peut alors constater que $AB \neq BA$, ce qui signifie que dans un cas général, le produit de deux matrices n'est pas commutatif.

Exercice n°3

On calcule :
$$AB = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 21-20 & 28-28 \\ -15+15 & -20+21 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21-20 & -12+12 \\ 35-35 & -20+21 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Ainsi, A et B sont inverses l'une de l'autre.

Exercice n°4

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.
   $ad - bc = 3 - (-24) = 27 \neq 0$ donc A^{-1} existe et :
   $$A^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -4 & 1 \end{pmatrix},$$
2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
   $ad - bc = 1 - 1 = 0$ donc A n'est pas inversible.
3. $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.
   $ad - bc = -35 - 4 = -39 \neq 0$ donc A est inversible et son inverse est :
   $$A^{-1} = -\frac{1}{39}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},$$
4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   $ad - bc = 0 - 1 = -1 \neq 0$ donc A est inversible et son inverse est :
   $$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

Exercice n°5

1. On obtient :
   $$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
2. — **Initialisation :** l'égalité est vraie pour $n = 1$.
   — **Hérédité :** supposons que pour un entier k fixé,
   $$A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
   Alors,
   $$A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix} 1 & 1+k & 1+k+\frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & 1+k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix} 1 & 1+k & (k+1)\left[1+\frac{k}{2}\right] \\ 0 & 1 & 1+k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix} 1 & 1+k & \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

L'hérédité est alors vérifiée.

L'égalité est donc vraie pour tout entier naturel n.

3. Si $n = -1$, l'égalité précédente devient :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Or,

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3, \end{aligned}$$

Ainsi, A^{-1} désigne bien l'inverse de A.

Exercice n°6

1. On trouve : $A^2 - 3A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que l'on peut aussi noter :

$$A^2 - 3A + 2I_3 = 0\cdot$$

2. De l'égalité obtenue précédemment, on peut en déduire que :

$$A^2 - 3A = -2I_3$$

soit,

$$A(A - 3I_3) = -2I_3 \qquad \text{ou} \qquad (A - 3I_3)A = -2I_3$$

et donc,

$$A \times \left[-\frac{1}{2}(A - 3I_3)\right] = I_3 \text{ou} \left[-\frac{1}{2}(A - 3I_3)\right] \times A = I_3\cdot$$

On en déduit alors que A est inversible et que son inverse est :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= -\frac{1}{2}(A - 3I_3) \\ &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0-3 & 1 & -1 \\ -3 & 4-3 & -3 \\ -1 & 1 & 0-3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice n°7

1. On vérifie que $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -18 \\ 6 & 18 & -18 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$ (matrice nulle).

2. $A^n = (N + I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k}$.

   Attention ! la formule du binôme de Newton fonctionne ici car $N \times I_3 = I_3 \times N$.

   Dans un cas général, le produit matriciel étant non commutatif, elle ne Or,

$$\forall k \geqslant 3, N^3 = 0$$

   donc :

$$\begin{aligned} A^n &= \binom{n}{0} N^0 I_3^n + \binom{n}{1} N^1 I_3^{n-1} + \binom{n}{2} N^2 I_3^{n-2} \\ &= I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \\ A^n &= \begin{pmatrix} 3n+1 & 9n & -9n \\ 3n^2 - n & 9n^2 - 9n + 1 & -9n^2 + 9n \\ 3n^2 & 9n^2 - 6n & -9n^2 + 6n + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice n°8

1. $\begin{cases} 3x - 5y &= 7 \\ -4x + 2y &= 1 \end{cases} \iff AX = B,$

   avec $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Ainsi,

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{5}{14} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{3}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{14} \\ -\frac{31}{14} \end{pmatrix}.$$

   On trouve alors $x = -\dfrac{19}{14}$ et $y = -\dfrac{31}{14}$.

2. $\begin{cases} 5x + 4y &= -1 \\ 3x - y &= 2 \end{cases} \iff AX = B,$

   avec $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   Ainsi,

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{17} & \frac{4}{17} \\ -\frac{3}{17} & -\frac{5}{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{17} \\ -\frac{13}{17} \end{pmatrix}.$$

   On trouve alors $x = \dfrac{7}{17}$ et $y = -\dfrac{13}{17}$.

3. $\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 2 \\ x + y - z &= 3 \end{cases} \iff AX = B,$

   avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

   Ainsi,

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On trouve alors $x = \dfrac{5}{2}$, $y = -\dfrac{1}{2}$ et $z = -1$.

4. $\begin{cases} x + 2y + 3z &= 6 \\ x - 2y - 3z &= -6 \\ x + y - 2z &= 0 \end{cases} \iff AX = B,$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ainsi,

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{14} & -\frac{5}{14} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{1}{14} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{12}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}.$$

On trouve : $x = 0$, $y = \dfrac{12}{7}$ et $z = \dfrac{6}{7}$.

Exercice n°9

À l'aide de votre calculatrice et en associant à chacun des systèmes suivant sa matrice, trouver leurs solutions.

1. Le système $\begin{cases} x + 2y &= 1 \\ x + 3y &= 2 \end{cases}$ peut être écrit sous la forme matricielle $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   Il admet un unique couple de solutions si A est inversible.

   À la calculatrice, on trouve : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   L'unique solution du système est donc le couple $(-1; 1)$.

2. Le système $\begin{cases} 3x - 5y &= 7 \\ 2x - 7y &= 5 \end{cases}$ peut être écrit sous la forme matricielle $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$.

   Il admet un unique couple de solutions si A est inversible.

   À la calculatrice, on trouve : $A^{-1} = \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ donc $X = A^{-1}B = \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 24 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   L'unique solution du système est donc le couple $\left(\dfrac{24}{11}; -\dfrac{1}{11}\right)$.

3. Le système $\begin{cases} -x + 2y &= -1 \\ 2x + 4y &= 1 \end{cases}$ peut être écrit sous la forme matricielle $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Il admet un unique couple de solutions si A est inversible.

   À la calculatrice, on trouve : $A^{-1} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ donc $X = A^{-1}B = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   L'unique solution du système est donc le couple $\left(\dfrac{3}{4}; -\dfrac{1}{8}\right)$.

4. Le système $\begin{cases} 5x + 4y &= -3 \\ 3x + 4y &= 5 \end{cases}$ peut être écrit sous la forme matricielle $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

   Il admet un unique couple de solutions si A est inversible.

   À la calculatrice, on trouve : $A^{-1} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ donc $X = A^{-1}B = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -16 \\ 17 \end{pmatrix}$.

   L'unique solution du système est donc le couple $\left(-4; \dfrac{17}{4}\right)$.

5. Le système $\begin{cases} x + y - z &= 1 \\ 2x - 3y + z &= -1 \\ x + 2y - z &= 2 \end{cases}$ peut être écrit sous la forme matricielle $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   Il admet un unique couple de solutions si A est inversible.

   À la calculatrice, on trouve : $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ donc $X = A^{-1}B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   L'unique solution du système est donc le triplet $\left(\dfrac{2}{3}\,;\,1\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$.

6. Le système $\begin{cases} x + 2y + 3z &= 4 \\ 3x + 2y + z &= 0 \\ x - y + z &= 1 \end{cases}$ peut être écrit sous la forme matricielle $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Il admet un unique couple de solutions si A est inversible.

   À la calculatrice, on trouve : $A^{-1} = \dfrac{1}{16}\begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & -8 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ donc $X = A^{-1}B = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   L'unique solution du système est donc le triplet $\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,0\,;\,\dfrac{3}{2}\right)$.

Exercice n°10

1. $A = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}$
2. — **Initialisation :** $U_1 = AU_0$ par définition de A donc l'initialisation est réalisée.
   — **Hérédité :** on suppose que pour un entier naturel k fixé, $U_k = A^k U_0$.
   Alors, $U_{k+1} = AU_k = A \times A^k U_0 = A^{k+1} U_0$.
   L'hérédité est alors vérifiée. Ainsi, pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.
3. $A^2 = \begin{pmatrix} 0{,}67 & 0{,}66 \\ 0{,}33 & 0{,}34 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0{,}667 & 0{,}666 \\ 0{,}333 & 0{,}334 \end{pmatrix}$ et $A^4 = \begin{pmatrix} 0{,}6667 & 0{,}6666 \\ 0{,}3333 & 0{,}3334 \end{pmatrix}$.

   On peut supposer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

   Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} a_n = \dfrac{2}{3}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} b_n = \dfrac{1}{3}$.

Exercice n°11

On considère les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{1}{2}(u_n + v_n) \\ v_{n+1} &= \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \end{cases},$$

Pour tout entier naturel n, on définit la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.
2. — **Initialisation :** $U_1 = AU_0$ par définition de A donc l'initialisation est réalisée.
   — **Hérédité :** on suppose que pour un entier naturel k fixé, $U_k = A^k U_0$.
   Alors, $U_{k+1} = AU_k = A \times A^k U_0 = A^{k+1} U_0$.
   L'hérédité est alors vérifiée. Ainsi, pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.
3. À la calculatrice (par exemple), on vérifie que $PQ = QP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc P et Q sont inverses l'une de l'autre.
4. Si $A = QDP = P^{-1}DP$, alors $PA = PP^{-1}DP = DP$ et $PAP^{-1} = DPP^{-1} = D$.

   On trouve alors $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.
5. On en déduit que $A^n = (QDP)^n = QD^nP$ et donc $U_n = A^n U_0 = QD^nPU_0$.
   En effectuant le calcul, on trouve ce qui est demandé.
6. On trouve alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{3}{5}$.

Exercice n°12

1. Raisonnons par récurrence.
   — Initialisation : évidente car $u_1 = 1$ et $2^1 = 2$.
   — Hérédité : on suppose que pour un entier $k \geqslant 1$ fixé, $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$.

   $A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_k + 2^k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_{k+1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix}$.

   L'hérédité est alors vérifiée. L'égalité est alors vraie pour tout $n \geqslant 1$.
2. $u_{n+1} - u_n = 2^n$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$.

   Ainsi, $u_n - u_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 2^k$, soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2^k$.

   Par conséquent, $u_n = \dfrac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$.

   On a alors :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix},$$

Exercice n°13

On considère un polynôme de degré 3 dont la courbe représentative passe par les points de coordonnées :

$$A(-2;-1), \quad B(-1;3), \quad C(1;5), \quad D(2;34)\cdot$$

Donner l'expression de ce polynôme.

Notons $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ le polynôme cherché, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

— $A(-2;-1) \in \mathcal{C} \iff P(-2) = -1$
$\iff a(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) + d = -1$
$\iff -8a + 4b - 2c + d = -1\cdot$

— $B(-1;3) \in \mathcal{C} \iff P(-1) = 3$
$\iff a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d = 3$
$\iff -a + b - c + d = 3\cdot$

— $C(1;5) \in \mathcal{C} \iff P(1) = 5$
$\iff a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + d = 5$
$\iff a + b + c + d = 5\cdot$

— $D(2;34) \in \mathcal{C} \iff P(2) = 34$
$\iff a(2)^3 + b(2)^2 + c(2) + d = 34$
$\iff 8a + 4b + 2c + d = 34\cdot$

En notant :

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 34 \end{pmatrix}$$

On a :

$$AX = B \iff X = A^{-1}B,$$

À l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$\boxed{P(x) = \frac{31}{12}x^3 + \frac{25}{6}x^2 - \frac{19}{12}x - \frac{1}{6}}.$$

Exercice n°14

On considère un mot constitué de lettres : $L_1 L_2 \cdots L_n$, n étant pair.
Soient 4 nombres a, b, c et d qui vont constituer la clé du chiffrement.
On remplace L_i par sa position dans l'alphabet en convenant d'avoir 0 pour A, 1 pour B, etc. On obtient alors une suite de nombres : u_1, u_2, $\cdots$, u_n. On pose alors :

$$\forall k \in [\![1, \frac{n}{2}]\!], \quad \begin{pmatrix} c_{2k-1} \\ c_{2k} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2k-1} \\ u_{2k} \end{pmatrix} \mod 26$$

On obtient une suite de nombres c_1, c_2, $\cdots$, c_n qui correspond à une suite de lettres.
Choisissons la clé matricielle $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$.

1. On a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 17 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 125 \\ 225 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} 21 \\ 17 \end{pmatrix} \mod 26 \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} V \\ R \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 15 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 177 \\ 243 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \end{pmatrix} \mod 26 \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} V \\ J \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, « CRYP » est chiffré en « VRVJ ».

2. Le déchiffrement consiste à trouver les u_k avec la relation :

$$\forall k \in [\![1, \frac{n}{2}]\!], \quad \begin{pmatrix} u_{2k-1} \\ u_{2k} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c_{2k-1} \\ c_{2k} \end{pmatrix} \mod 26$$

On trouve : $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 13 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Il nous faut trouver la valeur de $\frac{1}{25}$ modulo 26, c'est-à-dire le nombre x tel que $25 \times x \equiv 1 \mod 26$. Or, $25 \equiv -1 \mod 26$ donc $25 \times 25 \equiv 1 \mod 26$. Ainsi, l'inverse de 25 modulo 26 est égal à 25 (ou -1 si on veut ... ce qui va nous arranger pour le calcul suivant).
On a alors :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}^{-1} &\equiv 25 \begin{pmatrix} 13 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \mod 26 \\ &\equiv -1 \begin{pmatrix} 13 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \mod 26 \\ &\equiv \begin{pmatrix} -13 & 7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \mod 26 \\ &\equiv \begin{pmatrix} 13 & 7 \\ 2 & 23 \end{pmatrix} \mod 26 \end{aligned}$$

Exercice n°15

On considère la suite $(u_n)_{n \in mathbbN}$définie par ses deux premiers termes $u_0 = 3$ et $u_1 = 1$, et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n,$$

On pose alors :

$$U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

et la matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$.

1. On a : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En effet,

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix},$$

2. On a :
   — $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;
   — $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$.
   On peut alors en déduire que $(-A^2)A = I_2$ et $A(-A^2) = I_2$ donc l'inverse de A est :

$$A^{-1} = -A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

3. De la question précédente, on peut déduire que :
   — $A^4 = A \times A^3 = A \times (-I_2) = -A$;
   — $A^5 = A^4 \times A = -A \times A = -A^2$;
   — $A^6 = A^5 \times A = -A^2 \times A = -A^3 = -(-I_2) = I_2$.
   On en déduit alors que, pour tout entier naturel k,

   — $A^{6k} = I_2$;
   — $A^{6k+1} = A$;
   — $A^{6k+2} = A^2$;
   — $A^{6k+3} = A^3 = -I_2$;
   — $A^{6k+4} = -A$;
   — $A^{6k+5} = -A^2$.

   Or, $U_{n+1} = AU_n$ donc $U_n = A^n U_0$.
   — Si $n \equiv 0 \mod 6$, $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;
   — Si $n \equiv 2 \mod 6$, $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$;
   — Si $n \equiv 4 \mod 6$, $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$;
   D'où : $u_{6k} = 1$, $u_{6k+1} = 3$, $u_{6k+2} = -2$, $u_{6k+3} = -3$, $u_{6k+4} = -1$, $u_{6k+5} = 2$,
   On dit qu'une telle suite est *périodique* de période 6, c'est-à-dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+6} = u_n,$$