Corrigés

Exercice n°1

On sait que : $K_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$, où K_n est le nombre d'arêtes du graphe complet à n sommets.

1. $n = 10$ donc $K_{10} = \dfrac{10 \times 9}{2} = 45$.
2. $n = 5$ donc $K_5 = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10$.
3. $n = 300$ donc $K_{100} = \dfrac{100 \times 99}{2} = 4\,950$.
4. $n = 75$ donc $K_{75} = \dfrac{75 \times 74}{2} = 2\,775$.

Exercice n°2

1. La matrice d'adjacence est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il y a donc 5 chaînes de longueur 3 qui vont de A à E.

2. La matrice d'adjacence est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donc

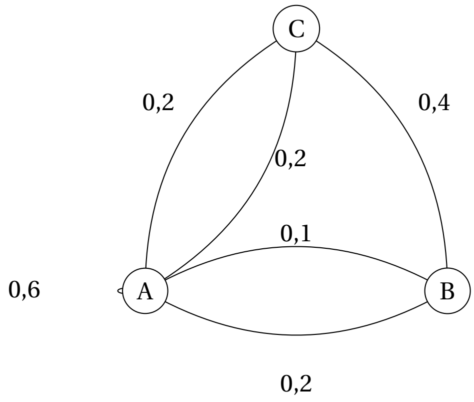
$$M^3 = \begin{pmatrix} 13 & 13 & 13 & 9 & 13 \\ 13 & 11 & 12 & 10 & 12 \\ 13 & 12 & 11 & 10 & 12 \\ 9 & 10 & 10 & 6 & 10 \\ 13 & 12 & 12 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

Il y a donc 11 chaînes de longueur 3 qui vont de C à C.

Exercice n°3

Les sites internet A, B, C ont des liens entre eux. Un internaute connecté sur un de ces trois sites peut soit y rester soit utiliser un lien vers un des deux autres sites.

1. On a le graphe suivant :



2. La matrice M de transition est alors :

$$M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$$

3. $N_2 = N_0 M^2 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,42 & 0,22 & 0,36 \\ 0,19 & 0,27 & 0,54 \\ 0,28 & 0,04 & 0,68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 22 & 36 \end{pmatrix}$.
   Cela signifie qu'après 2 minutes, il y a 42 internautes sur le site A, 22 sur le site B et 36 sur le site C.
4. $N_0 \times M^{20} \approx \begin{pmatrix} 31,25 & 12,5 & 56,25 \end{pmatrix} = N_{20}$.
   « 20 » est assez grand pour que l'on puisse assimiler N_{20} à l'état stable.
   Cela signifie alors qu'à long terme, il y aura 31,25% des internautes sur le site A, 12,5% sur le site B et 56,25% sur le site C (quel que soit le nombre d'internautes au départ).
5. (a) D'après le graphe, la probabilité de passer de C à A en 1 minute est égale à 0,2.
   Ainsi, la probabilité pour qu'à l'instant $t = 1$ le site A soit infecté est égale à 0,2.
   (b) Pour que les trois sites soient infectés, il faut que l'internaute utilise le chemin $C \to B \to A$ (ce qui est impossible car il ne peut pas passer de C à B) ou le chemin $C \to A \to B$, avec une probabilité de $0,2 \times 0,2 = 0,04$.
   La probabilité pour que les 3 sites soient infectés à l'instant $t = 2$ est égale à 0,04.

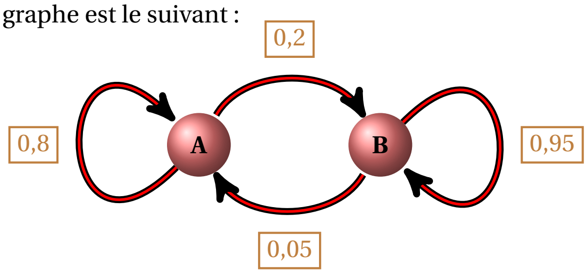
Exercice n°4

Une région se divise en deux zones :

- une zone A à proximité d'une grande agglomération
- une zone B à proximité de la mer

1. D'après l'énoncé, $P_0 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$.
   En effet, en 2010, 40% de la population était dans la zone A, ce qui correspond à une proportion de 0,4.

2. Le graphe est le suivant :



3. (a) La matrice de transition est : $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix}$.

   (b) La répartition de la population en 2012 est donnée par P_2.

$$P_1 = P_0 M = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}35 & 0{,}65 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = P_1 M = \begin{pmatrix} 0{,}35 & 0{,}65 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3125 & 0{,}6875 \end{pmatrix}$$

   Ainsi, 31,25% de la population habitera en zone A et 68,75% en zone B.

4. (a) On a :

$$\begin{aligned} P = PM &\iff \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8a + 0{,}05b & 0{,}2a + 0{,}95b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Ainsi :

$$\begin{cases} 0{,}8a + 0{,}05b = a \\ 0{,}2a + 0{,}95b = b \end{cases}$$

   Soit : $0{,}05b = 0{,}2a$. Donc : $b = 4a \qquad (1)$.

   De plus,

$$a + b = 1 \iff a = 1 - b,$$

   Ainsi :

$$(1) \iff b = 4(1-b)\,,$$

   d'où :

$$b = 4 - 4b,$$

   On a alors :

$$b = \frac{4}{5} \qquad \text{et donc} \qquad a = \frac{1}{5},$$

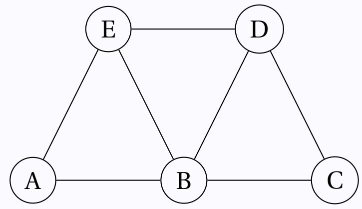
   Finalement, on a :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}}$$

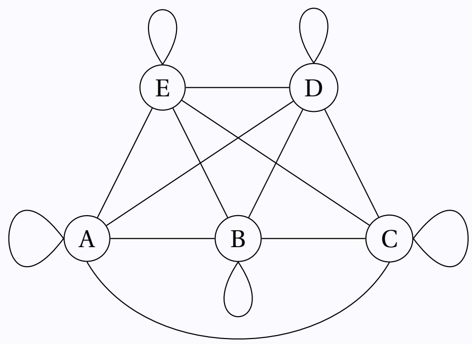
   (b) Le maire a en effet raison de prévoir de nouvelles infrastructures car la proportion d'habitants dans la zone B se rapprochera des 80%.

Exercice n°5

Maison 1. Le graphe est le suivant :

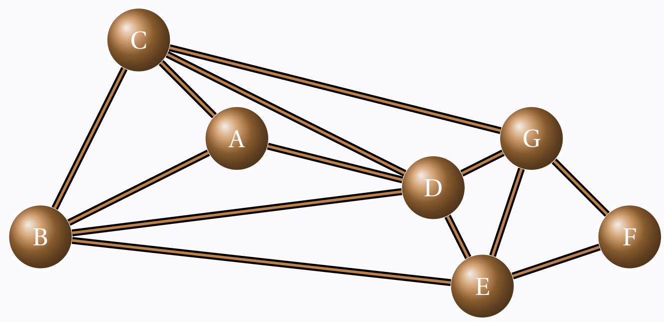


Maison 2. Le graphe est le suivant :



Exercice n°6

Un parc est composé de 7 attractions principales A, B, C, D, E, F et G.
Le graphe ci-dessous représente les liaisons entre elles :



1. Un graphe est *complet* s'il est simple (sans double liaison entre deux même sommets) et si tous les sommets peuvent être reliés deux à deux.

   Ce n'est pas le cas ici car B n'est pas relié à G par exemple.

   Ce graphe n'est donc pas complet.

2. L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets du graphe.

   Donc ici, l'ordre du graphe est égal à 7.

3. La matrice d'adjacence du graphe est la suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. La calculatrice nous donne :

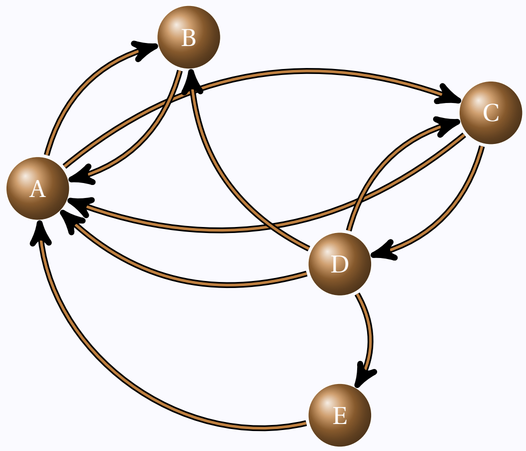
$$M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 9 & 11 & 6 & 4 & 6 \\ 9 & 8 & 12 & 12 & 11 & 4 & 7 \\ 9 & 12 & 8 & 12 & 7 & 4 & 11 \\ 11 & 12 & 12 & 12 & 12 & 4 & 12 \\ 6 & 11 & 7 & 12 & 6 & 6 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 6 & 2 & 6 \\ 6 & 7 & 11 & 12 & 10 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Ainsi, il y a 7 chemins de longueur 3 reliant E à C.

Rappel. Le coefficient de M^n situé à la i-ème ligne et j-ème colonne (ou à la j-ème ligne et i-ème colonne) est le nombre de chemins de longueur n reliant les sommets ayant pour position i et j dans la matrice d'adjacence.

Exercice n°7

1. Le graphe est le suivant :



2. En convenant de respecter l'ordre alphabétique, la matrice d'adjacence de ce graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

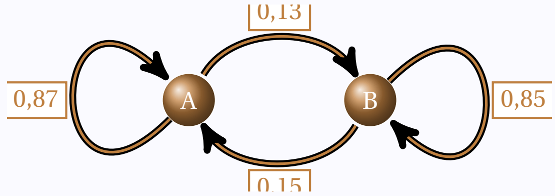
3. Après avoir calculé M^4, on voit que le coefficient de la 1re ligne et 1re colonne est 7.
   Il y a donc 7 chemins possibles pour passer de la page A à la page A en 4 clics.
4. Le chemin :

   A→B→A→C→D→E→A→C→A→C→D→B→A→C→D→C→D→A

   convient, même s'il passe plusieurs fois par les mêmes sommets et s'il emprunte plusieurs fois les mêmes arêtes.

Exercice n°8

1. Le graphe correspondant à cette situation est le suivant :



2. La matrice de transition est :

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}87 & 0{,}13 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix}$$

3. — On souhaite calculer P_1 :

$$P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}87 & 0{,}13 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0{,}51 & 0{,}49 \end{pmatrix} = P_1}$$

   Ainsi, après 1 année, l'entreprise A détiendra 51% du marché.

   — On souhaite calculer P_5 :

$$P_5 = P_0 \times M^5 = \boxed{\begin{pmatrix} 0{,}5288 & 0{,}4712 \end{pmatrix} = P_5}$$

   , après 5 années, l'entreprise A détiendra 52,88% du marché.

4. Notons $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ l'état stable du graphe. Alors, par définition :

$$P = PM \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}87 & 0{,}13 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix},$$

   On arrive ainsi au système suivant :

$$\begin{cases} 0{,}87a + 0{,}15b & = a \\ 13a + 0{,}85b & = b \end{cases}$$

   ou encore, en faisant tout passer à gauche :

$$\begin{cases} -0{,}13a + 0{,}15b & = 0 \\ 13a - 0{,}15b & = 0 \end{cases}$$

   On obtient ainsi deux équations équivalentes (car la 1re est l'opposée de la 2nde).
   De plus, $a + b = 1$ car a et b sont les deux seules probabilités de notre situation.
   On a finalement le système suivant :

$$\begin{cases} a + b & = 1 \\ 13a - 0{,}15b & = 0 \end{cases}$$

   que l'on peut aussi écrire de façon matricielle :

$$AX = B, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}13 & -0{,}15 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

   Ainsi,

$$X = A^{-1}B = \boxed{\begin{pmatrix} 0{,}5357 \\ 0{,}4643 \end{pmatrix}}$$

   ce qui signifie qu'à longs termes, l'entreprise A possèdera 53,57 du marché.