# Arithmétique
## Avant de commencer

Évarite Galois
maths-mde.fr

### Exercice 1 :

1 Soient $n$ et $m$ deux entiers naturels pairs. Il existe alors deux entiers naturels $p$ et $q$ tels que $n = 2p$ et $m = 2q$. Et cela implique que $n+m = 2(p+q)$. Autrement dit, $n+m$ est pair. (C.Q.F.D.)

2 Soient $n$ et $m$ deux entiers naturels pairs. Il existe alors deux entiers naturels $p$ et $q$ tels que $n = 2p$ et $m = 2q$. Et cela implique que $nm = 2(2pq)$. Autrement dit, $nm$ est pair. (C.Q.F.D.)

3 Voici les résultats.

| $+$ | Pair | Impair |
|---|---|---|
| Pair | Pair | Impair |
| Impair | impair | pair |

| $\times$ | Pair | Impair |
|---|---|---|
| Pair | Pair | Pair |
| Impair | Pair | Impair |

### Exercice 2 :

1 7 et 11 sont égaux à la différence de deux carrés. En effet, $7 = 4^2 - 3^3$ et $11 = 6^2 - 5^2$.

2 Tout entier naturel impair peut s'écrire comme la différence de deux carrés successifs. En effet, $2n+1 = n^2+2n+1-n^2 = (n+1)^2 - n^2$, avec $n$ un entier naturel.

### Exercice 3 :

Soit $n$ un nombre entier naturels. Dire que la somme de quatre nombres consécutifs est égale à 2020 revient à dire que :

$$\begin{aligned}
n+(n+1)+(n+2)+(n+3) &= 2020\\
4n+6 &= 2020\\
4n &= 2020-6\\
4n &= 2014\\
n &= \frac{2014}{4}\\
n &= 503\times 4+2.
\end{aligned}$$

Ainsi, 2020 n'est la somme de quatre entiers naturels consécutifs.

### Exercice 4 :

Soit $(U_n)$ la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $U_{n+1} = 2^{n+1} + U_n$ et de premier terme $U_0 = 2$.
Démontrons par récurrence sur $n$ que $U_n$ est pair.

— **Initialisation :** Pour $n = 1$, $U_1 = 2^1 + U_0 = 4$ est pair.

— **Hérédité :** supposons que pour un entier $k$ fixé, $U_k$ est pair. Alors,

$$\begin{aligned}
U_{k+1} &= 2^{k+1} + U_k\\
&= 2\left(2^k + \frac{U_k}{2}\right) \quad \text{avec } \frac{U_k}{2} \in \mathbb{N}, \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence.}
\end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée.
D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel $n$, $U_n$ est pair.

## Exercice 5 :

$\boxed{1}$ (a) $(2k+1)^2 = (2k)^2 + 2\times 2k\times 1 + 1^2 = 4k^2+4k+1$.

(b) $n^2$ peut s'écrire sous la forme « $2\times(\text{un entier})+1$ ».
Il est donc impair.

$\boxed{2}$ (a) $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$.
$p^2$ s'écrit sous la forme « $2\times(\text{un entier})$ », il est donc pair.
Par conséquent $p$ est forcément pair lui aussi.

(b) Si $p=2k$ alors $p^2 = 2q^2 \Rightarrow (2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 = 2\times(\text{un entier})$.
Donc si $p$ est pair alors $q^2$ l'est aussi, ce qui entraine que $q$ est également pair.
Dès lors $\frac{p}{q} = \frac{2\times(\text{un entier})}{2\times(\text{un autre entier})}$ ne pourrait pas être irréductible.
Ce qui contredit l'hypothèse de départ que $\sqrt{2}$ pourrait s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$.
Conclusion : $\sqrt{2}$ ne pouvant pas s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible d'entiers, il est donc un nombre irrationnel.

## Exercice 6 :

$n$ désigne un nombre entier à trois chiffres dont le chiffre des centaines est $c$, le chiffre des dizaines est $d$ et le chiffre des unités est $u$.

$\boxed{1}$ $n = 100\times c + 10\times d + u$.

$\boxed{2}$ On sait que : $5|100c$ car $100c = 5\times 20c$ et $5|10d$ car $10d = 5\times 2d$, donc $5|100c+10d$.

$\boxed{3}$ On sait que : $5|100c+10d$ . Si $u=0$ ou $u=5$ alors $5|100c+10d+u$, soit $5|n$.
Et, si $5|n$, alors $5|n-(100c+10d)$, soit $5|u$, par conséquent, $u=0$ ou $5$.

## Exercice 7 :

$n$ désigne un nombre entier à trois chiffres dont le chiffre des centaines est $c$, le chiffre des dizaines est $d$ et le chiffre des unités est $u$.

$\boxed{1}$ $n = 100c+10d+u = 99c+c+9d+d+u = 99c+9d+c+d+u$.

$\boxed{2}$ (a) On sait que : $3|99c$ car $99c = 3\times 33c$ et $3|9d$ car $9d = 3\times 3d$, donc $3|99c+9d$.

(b) On sait que : $3|99c+9d$ . Si $3|c+d+u$ alors $3|99c+9d+c+d+u$, soit $3|n$.
Et, si $3|n$, alors $3|n-(100c+10d)$, soit $3|c+d+u$.

$\boxed{3}$ Idem pour 9.

## Exercice 8 :

$n$ désigne un nombre entier à trois chiffres. On peut écrire $n$ sous la forme $100c+10d+u$, avec $c$ le chiffre des centaines, $d$ le chiffre des dizaines et $u$ le chiffre des unités. On sait que $4|100c$, car $100c = 4\times 25c$. Par conséquent, pour que $4|n$, il faut que $n|n-100c$, soit $n|10d+u$.

## Exercice 9 :

Les nombres de Mersenne.

$\boxed{1}$ (a) Un nombre parfait est un nombre égal à la somme de ses diviseurs positifs stricts.
1, 2 et 3 sont les diviseurs stricts de 6. En outre, $1+2+3=6$, ainsi 6 est un nombre parfait.

1, 2, 14, 4 et 7 sont les diviseurs stricts de 28. En plus, $1+2+4+7+14=28$. Donc 28 est un nombre parfait.

(b) Pour tout entier naturel non nul $n$, $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=\dfrac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$.

(c) Pour tous entiers $a$ et $n$ supérieurs ou égaux à 2, $a^n-1$ est divisible par $a-1$. En effet, $(a-1)(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})=a^n-1$.
Autrement dit, $1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}=\dfrac{a^n-1}{a-1}$.

2 (a) $n$ n'est pas un nombre premier, alors il existe deux entiers $p$ et $q$ différent de $n$ tels que $n=pq$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 2^n-1 &= 2^{pq}-1 \\ &= (2^p)^q-1 \\ &= (2^p-1)(1+2^p+\cdots+2^{p(q-1)}). \end{aligned}$$

Ce dernier résultat entraine que $(2^q-1)|(2^n-1)$. Autrement dit, $2^n-1$ n'est pas un nombre premier.

(b) Pour tout $n\geqslant 2$, on pose $M_n=2^n-1$. Ainsi,
$M_2=2^2-1=3$ et 3 est un nombre premier.
$M_3=2^3-1=7$ et 7 est un nombre premier.
$M_4=2^4-1=15$ et 15 n'est pas un nombre premier.
$M_5=2^5-1=31$ et 15 est un nombre premier.
$M_6=2^6-1=63$ et 15 n'est pas un nombre premier.
$M_7=2^7-1=127$ et 127 est un nombre premier.
$M_8=2^8-1=255$ et 255 n'est pas un nombre premier.
$M_9=2^9-1=511$ et 511 n'est pas un nombre premier.
$M_{10}=2^{10}-1=1023$ et 1023 n'est pas un nombre premier.
Étudier la primalité des nombres $M_2$, $M_3$, ... , $M_{10}$.

(c) Ainsi, on ne peut à ce stade, conjecturer « si $n$ est premier, alors $M_n$ est aussi premier. » En effet, 11 est un nombre premier et $M_{11}=2^{11}-1=2047$ ne l'est pas.

## Exercice 10 :

2020 est pair, il est donc divisible par 2.
2020 est divisible par 5, car son chiffre des unités est 0.
2020 n'est pas divisible par 3, car la somme de ses chiffres n'est pas un multiple de 3.

## Exercice 11 :

Lors d'un tournoi de jeu de société, on compte 60 hommes et 40 femmes inscrits.
Les organisateurs veulent créer deux équipes mixtes contenant toutes le même nombre $x$ d'hommes et $y$ de femmes.
En décomposant 60 et 40 en produit de facteurs premiers, on obtient :

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \text{Donc : } 60=2^2\times 3\times 5. \qquad \begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \text{Donc : } 40=2^3\times 5.$$

Les organisateurs peuvent constituer 10 équipes de 6 hommes et 4 femmes. Car, 10 est un diviseur commun de 60 et 40.
Les organisateurs peuvent également constituer 20 équipes de 3 hommes et 2 femmes. Car, 20 est un

diviseur commun de 60 et 40.