Maths Expertes
Entraînement

Arithmétiques

Congruence & PGCD

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

1. Le reste de la division euclidienne de 1000 par 37 est 1. En effet, $1000 = 27\times 37 + 1$. Ainsi, $1000 \equiv 1 \ [37]$.
Or, $1000 = 10^3$. Donc, pour tout entier naturel n, $(10^3)^n \equiv 1^n[37]$.
Par conséquent, $10^{3n} \equiv 1 \ [37]$.

2. On sait que : $1\,001\,037 = 10^6 + 10^3 + 37$.
Par ailleurs, $10^6 \equiv (10^3)^2 \equiv 1 \ [37]$; $10^3 \equiv 1 \ [37]$ et $37 \equiv 0 \ [37]$.
Ainsi, $10^6 + 10^3 + 37 \equiv 1+1+0 \ [37]$. Autrement dit, $1\,001\,037 \equiv 2 \ [37]$.
Par conséquent, 2 est le reste de la division euclidienne de 1 001 037 par 37.

Exercice 2 :

1. Le reste de la division euclidienne de 67 par 11 est 1. En effet, $67 = 11\times 6 + 1$. Ainsi, $67 \equiv 1 \ [11]$.
Cela implique, $67^{89} \equiv 1^{89} \ [11]$. Autrement dit, $67^{89} \equiv 1 \ [11]$.

2. Il est clair que : $5 \equiv -1 \ [3]$ et $5^2 \equiv 1 \ [3]$.
Et cela entraine, $5^n \equiv (-1)^n \ [3]$ et $5^{2n} \equiv 1 \ [3]$.
De plus, $5^{2n} + 5^n + 1 \equiv (-1)^n + 2 \ [3]$.
Ainsi, si n est pair, alors $(-1)^n + 2 = 3$, ce qui implique que $5^{2n} + 5^n + 1 \equiv 3 \equiv 0 \ [3]$.
Et, si n est impair, alors $(-1)^n + 2 = 1$, ce qui implique que $5^{2n} + 5^n + 1 \equiv 1 \ [3]$.
Par conséquent, $5^{2n} + 5^n + 1$ est un multiple de 3, quand n est pair.

Exercice 3 :

En utilisant le raisonnement par disjonction de cas, on obtient pour tout entier m :
$m \equiv 0 \ [5]$ ou $m \equiv 1 \ [5]$ ou $m \equiv 2 \ [5]$ ou $m \equiv 3 \ [5]$ ou $m \equiv 4 \ [5]$. Ainsi,

— si $m \equiv 0 \ [5]$ alors $m^2 \equiv 0 \ [5]$;
— si $m \equiv 1 \ [5]$ alors $m^2 \equiv 1 \ [5]$;
— si $m \equiv 2 \ [5]$ alors $m^2 \equiv 4 \ [5]$ et $4 \equiv -1 \ [5]$, ce qui implique $m^2 \equiv -1 \ [5]$;
— si $m \equiv 3 \ [5]$ alors $m^2 \equiv 9 \ [5]$ et $9 \equiv -1 \ [5]$ ce qui implique $m^2 \equiv -1 \ [5]$;
— si $m \equiv 4 \ [5]$ alors $m^2 \equiv 16 \ [5]$ et $16 \equiv 1 \ [5]$ ce qui implique $m^2 \equiv 1 \ [5]$.

Par conséquent, il existe n entier naturel tel que $m^2 = 5n$ ou $m^2 = 5n+1$ ou $m^2 = 5n-1$, Autrement dit, le carré de tout entier naturel est de la forme $5n-1$ ou $5n$ ou $5n+1$.

Exercice 4 :

1. On sait que :
$14x \equiv 3 \ [4] \Leftrightarrow 4 | 14x - 3$.
Il existe alors un entier p tel que $14x - 3 = 4p$. Ainsi, $3 = 14x - 4p = 2(7x - 2p)$. Et, ceci signifie que $2|3$, autrement dit, 3 est pair. C'est complètement absurde. Par conséquent, $S = \varnothing$.

2. On a : $\begin{cases} 3x & \equiv 1 \ [5] \\ 5x & \equiv 2 \ [7] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5|3x-1 \\ 7|5x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists p \in \mathbb{Z} \mid & 3x - 1 = 5p \\ \exists p' \in \mathbb{Z} \mid & 5x - 2 = 7p' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists p \in \mathbb{Z} \mid & 3x + 5p = 1 \\ \exists p' \in \mathbb{Z} \mid & 5x + 7p' = 2 \end{cases}.$

Par ailleurs, il est assez aisé de voir que le couple $(2,-1)$ est une solution de l'équation $3x+5p=1$.
Donc, $3x+5p=1 \Leftrightarrow 3(x-2)+5(p+1)=0 \Leftrightarrow 3(x-2)=-5(p+1)$ et $5|3(x-2)$.
De plus $5|3(x-2)$ et $5\wedge 3=1$, ainsi d'après le théorème de Gauss $5|x-2$, autrement il existe $n\in\mathbb{Z}$ tel que $x=5n+2$.
Par conséquent, $3x\equiv 1[5] \Leftrightarrow x=5n+2,\ \ n\in\mathbb{Z}$.
Nous allons utiliser le même raisonnement pour l'équation, $5x+7p'=2$.
On a, $PGCD(5,7)=1$, alors d'après le théorème de Bézout, il existe u et v entiers relatifs tels que $5u+7v=1\quad(*)$.
Il est assez aisé d'observer que le couple $(3,-2)$ est solution de $(*)$; et donc le couple $(6,-4)$ est solution de l'équation, $5x+7p'=2$. On déduit alors que,
$5x+7p'=2 \Leftrightarrow 5(x-6)+7(p'+4)=0 \Leftrightarrow 5(x-6)=7(p'+4)$ et $7|5(x-6)$.
De plus, $5\wedge 7=1$, dons d'après le théorème de Gauss $7|x-6$ et donc il existe $n'\in\mathbb{Z}$ tel que $x=7n'+6$.
Par conséquent, $5x\equiv 2[7] \Leftrightarrow x=7n'+6,\ \ n\in\mathbb{Z}$.
Ceci implique $5n+2=7n'+6$, soit $5n-7n'=4$.
Il est évident que le couple $(3,2)$ est solution de l'équation $5n-7n'=1$, donc le couple $(12,8)$ est solution de l'équation $5n-7n'=4$. On en déduit alors que,
$5n-7n'=4 \Leftrightarrow 5(n-12)-7(n'-8)=0 \Leftrightarrow 5(n-12)=7(n'-8)$ et $7|5(n-12)$ *
Or, $7\wedge 5=1$, donc d'après le théorème de Gauss $7|n-12$, et donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $n=7k+12$.
Par suite, $x=5(7k+12)+2=35k+62$. Ainsi, $S=\{35k+62, k\in\mathbb{Z}\}$.

Exercice 5 :

$\boxed{1}$ Il est assez aisé de voir que :
$3\equiv 3\ \ [8]$, $3^2\equiv 1\ \ [8]$, $3^3\equiv 3\ \ [8]$, $3^4\equiv 1\ \ [8]$.
On déduit alors que :

- si $n=2p$ avec $p\in\mathbb{N}$, alors $3^{2p}\equiv 1\ \ [8]$, car $3^{2p}=(3^2)^p$ et $(3^2)^p\equiv 1^p\ \ [8]$;
- si $n=2p+1$ avec $p\in\mathbb{N}$, alors $3^{2p+1}\equiv 3\ \ [8]$, car $3^{2p+1}=3(3^2)^p$ et $3^{2p}=1\ [8]$.

Par conséquent, le reste de la division euclidienne de 3^n par 8 est égal à : 1 quand n pair et 3 quand n est impair.

$\boxed{2}$ Soit n un entier naturel.

Si n est pair alors, $n3^n\equiv n\ \ [8]$ et donc $n3^n-9n+2\equiv -8n+2\ \ [8]$, autrement dit, $n3^n-9n+2\equiv 2\ \ [8]$.
Le reste de la division euclidienne étant toujours égale à 2, indépendamment de n, $n3^n-9n+2$ n'est pas divisible par 8, quand n est pair.

Si n est impair alors, $n3^n\equiv 3n\ \ [8]$ et donc $n3^n-9n+2\equiv -6n+2\ \ [8]$.
Autrement dit, $n3^n-9n+2\equiv 2n+2\ \ [8]$. Ainsi, le reste de la division euclidienne est égale à 0, quand $2n+2=8$, et plus généralement quand $n=3\ [8]$.

Exercice 6 :

On a : $3^3=27$, donc $3^3\equiv 5\ [11]$ et $3^{n+3}\equiv 5\times 3^n\ [11]$.
Or, $4^4=256$ et $256\equiv 3\ [11]$. Ainsi, $4^{4n}\equiv 3^n\ [11]$.
De plus, $4^2\equiv 5\ [11]$, donc $4^{4n+2}\equiv 5\times 3^n\ [11]$.
Par conséquent, $3^{n+3}-4^{4n+2}\equiv 0\ \ [11]$. Autrement dit, $11\mid 3^{n+3}-4^{4n+2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Exercice 7 :

On sait que : $7 \mid x^2+3x \Leftrightarrow x^2+3x \equiv 0\ [7] \Leftrightarrow x(x+3) \equiv 0\ [7]$.
Or, 7 est premier donc d'après le théorème de Gauss, il ne peut diviser un produit d'entiers que si il divise au moins un de ces entiers.
On a donc,
$x(x+3) \equiv 0\ [7] \Leftrightarrow x \equiv 0\ [7]$ ou $(x+3) \equiv 0\ [7]$.
Ce qui peut s'écrire sous la forme : $x \equiv 0\ [7]$ ou $x \equiv 4\ [7]$.
Par conséquent, les entiers relatifs x tels que x^2+3x soit divisible par 7 sont les entiers de la forme $7k$ ou de la forme $7k+4$, où k est un entier relatif quelconque.

Exercice 8 :

Pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$\begin{aligned} x &= 1+n+2n^2+n^3+n^4 \\ &= 1+n+n^2+n^2+n^3+n^4 \\ &= 1+n^2+n(1+n^2)+n^2(1+n^2) \\ &= (1+n^2)(1+n+n^2). \end{aligned}$$

Ainsi, $1+n^2 \mid x$ et $1+n+n^2 \mid x$. Par conséquent, x n'est pas un nombre premier.

Exercice 9 :

$\boxed{1}$ Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$.
Dire que a et b ne sont pas divisibles par 7, revient à dire que :
$a \equiv 1\ [7]$ ou $a \equiv 2\ [7]$ ou $a \equiv 3\ [7]$ ou $a \equiv 4\ [7]$ ou $a \equiv 5\ [7]$ ou $a \equiv 6\ [7]$.
Idem, pour b. Cela entraine que :
$a^2 \equiv 1\ [7]$ ou $a^2 \equiv 4\ [7]$ ou $a^2 \equiv 2\ [7]$ ou $a^2 \equiv 2\ [7]$ ou $a^2 \equiv 4\ [7]$ ou $a^2 \equiv 1\ [7]$.
Idem, pour b. Ainsi, Aucune somme a^2+b^2 ne peut donc être congrue à 0 modulo 7.
Par conséquent, a et b ne sont pas divisibles par 7 alors a^2+b^2 n'est pas divisible par 7.

$\boxed{2}$ On a : $3^2 \equiv 2\ [7]$ et $2^2 \equiv 4\ [7]$.
Ainsi, $3^{2n} \equiv 2^n\ [7]$ et $2^{n+2} \equiv 4 \times 2^n\ [7]$.
De plus, $3^{2n+1} \equiv 3 \times 2^n\ [7]$.
Par conséquent, $3^{2n+1}+2^{n+2} \equiv 3 \times 2^n + 4 \times 2^n\ [7]$. Autrement dit,$3^{2n+1}+2^{n+2} \equiv 0\ [7]$.
Conclusion : pour tout n entier naturel, $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est bel et bien divisible par 7

Exercice 10 :

Calculer pour tout entier naturel n non nul.

$\boxed{1}$ Il est assez aisé de voir que : $-2 \times n + 1 \times (n+1) = 1$. Ainsi, d'après le théorème de Bézout n et $2n+1$ sont premiers entre eux.
Par conséquent, $n \wedge 2n+1 = 1$ et $n \vee 2n+1 = n(2n+1)$.

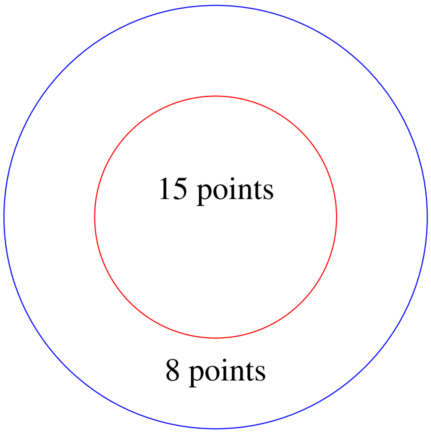
$\boxed{2}$ Il est assez aisé de voir que : $2 \times (n+1) - 1 \times (2n+1) = 1$. Ainsi, d'après le théorème de Bézout $n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux.
Par conséquent, $2n+2 \wedge 4n+2 = 2 \times 1 = 2$ et $2n+2 \vee 4n+2 = 2(n+1)(2n+1)$.

Exercice 11 :

1. Il est assez aisé de voir que le couple $(-1,2)$ est solution de l'équation $15x+8y=1$.

2. Il est assez aisé de déduire que le couple $(-1000,2000)$ est une solution de l'équation $15x+8y=1000$. Par ailleurs,
$15x+8y=1000 \Leftrightarrow 15(x+1000)+8(y-2000)=0 \Leftrightarrow 15(x+1000)=8(y-2000)$ et$8|15(x+1000)$.
Or, $8\wedge 15=1$ alors d'après le théorème de Gauss $8\ |x+1000$ D'où $x=8k-1000, k\in\mathbb{Z}$ et $y=-15k+2000, k\in\mathbb{Z}$.
Par conséquent, $S=\{(8k-1000,-15k+2000), k\in\mathbb{Z}\}$.

3. Soit x et y le nombre de flèches qui atteignent respectivement le disque et la couronne.
D'après la question précédente : $15x+8y=1000 \Leftrightarrow x=8k-1000$ et $y=-15k+2000, (x,y)\in\mathbb{N}^2$.
Or, $8k-1000\geqslant 0$ et $-15k+2000\geqslant 0, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{1000}{8}\leqslant k\leqslant \dfrac{2000}{15}$.
Donc, $k\in[125,133]\cap\mathbb{N}$.
Ainsi, le nombre de façons d'obtenir exactement 1000, correspond au nombre de façons de choisir le couple (x,y) solution de l'équation. A chaque valeur de k correspond un couple (x,y) ; k prend 9 valeurs possibles de 125 à 133. Par conséquent, il y a 9 façons d'obtenir exactement 1000 points en lançant des fléchettes sur cette cible.



Le nombre de fléchettes n'est pas limité et on suppose qu'elles atteignent toutes les cibles.

Exercice 12 :

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définis par $u_0=14$ et $u_{n+1}=5u_n-6$; $n\in\mathbb{N}$.

1. Les quatre premiers termes de la suite sont :
$u_1=5u_0-6=5\times 14-6=64$;
$u_2=5\times 64-6=314$;
$u_3=5\times 314-6=1564$;
$u_4=5\times -6=7814$.
Conjecture : Si n est pair, le nombre composé par les deux derniers chiffres de u_n est 14.
Si n est impair, le nombre composé par les deux derniers chiffres de u_n est 64.

2. (a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=5u_{n+1}-6=5(5u_n-6)-6=25u_n-36$.
Or, $25\equiv 1\ [4]$ et $36\equiv 0\ [4]$. Ainsi, $25u_n-36\equiv u_n\ [4]$.
Autrement dit, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}\equiv u_n\ \ [4]$.

   (b) Démonstration par récurrence.
Initialisation : Pour $k=0$, $u_0=14$ et $u_1=64$. Ainsi, $u_0\equiv 2\ [4]$ et $u_1\equiv 0\ [4]$.
Hérédité : Supposons que $u_{2k}\equiv 2\ \ [4]$ et $u_{2k+1}\equiv 0\ \ [4]$, pour un entier k.

Nous avons par définition, $u_{2(k+1)} = u_{2n+2}$ et $u_{2(k+1)+1} = u_{2k+3} = 5u_{2n+2} - 6$.
En utilisant la question précédente, on obtient : $u_{2(k+1)} \equiv u_{2k}$ [4] et $u_{2k+3} \equiv 5u_{2k} - 6$ [4].
Autrement dit, $u_{2k+2} \equiv u_{2k}$ [4] et $u_{2n+3} \equiv u_{2k+1}$ [4].
Or par hypothèse, nous avons : $u_{2k} \equiv 2$ [4] et $u_{2k+1} \equiv 0$ [4].
Ainsi, $u_{2k+2} \equiv 2$ [4] et $u_{2n+3} \equiv 0$ [4].
Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{2k} \equiv 2$ [4] et $u_{2k+1} \equiv 0$ [4].

$\boxed{3}$ (a) Démonstration par récurrence de la propriété $\mathscr{P}(n)$: $\quad \forall n \in \mathbb{N}, 2u_n = 5^{n+2} + 3$.
Initialisation : Pour $n = 0$, $2u_0 = 2 \times 14 = 28$ et $5^{0+2} + 3 = 25 + 3 = 28$. Ainsi, $\mathscr{P}(1)$ est vérifiée.
Hérédité : Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vérifiée pour un entier n.
Nous avons par définition, $2u_{n+1} = 2 \times (5u_n - 6) = 10u_n - 12$.
En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :
$2u_{n+1} = 5(5^{n+2} + 3) - 12 = 5^{n+2+1} + 15 - 12 = 5^{n+3} + 3$.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

(b) Il est assez aisé de voir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $5^n \equiv 1$ [4].
Ainsi, il existe un entier p tel que $5^n = 4p + 1$.
Dès lors, $5^{n+2} = 25 \times (4p + 1) = 100p + 25$.
Donc, $5^{n+2} + 3 = 25 \times (4p + 1) = 100p + 28$. Autrement dit, $\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_n \equiv 28[100]$.

$\boxed{4}$ D'après la question précédente, $2u_n \equiv 28[100]$, il existe un entier naturel q tel que $2u_n = 100q + 28$.
Si q est pair, on peut écrire $2u_n = 200q' + 28$, avec $q = 2q'$. Ce qui implique, $u_n = 100q' + 14$. Autrement dit, 14 est le nombre composé par les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n.
Par ailleurs, $100 \equiv 0$ [4] et $14 \equiv 2$ [4], donc $u_n \equiv 2[4]$. Et ce résultat est vrai quand n est pair.
Si q est impair, on peut écrire $2u_n = 200q' + 128$, avec $q = 2q' + 1$. Ce qui implique, $u_n = 100q' + 64$. Autrement dit, 64 est le nombre composé par les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n.
Par ailleurs, $100 \equiv 0$ [4] et $64 \equiv 0$ [4], donc $u_n \equiv 0[4]$. Et ce résultat est vrai quand n est impair.

$\boxed{5}$ D'après la question précédente, 2 est un diviseur commun de u_n et u_{n+1}.
Soit d un diviseur commun différent de 2.
Comme $d \mid u_n$ et $d \mid u_{n+1}$, alors $d \mid u_{n+1} - 5u_n$. Autrement dit, $d \mid 6$. Ainsi, $d \in \{1; 2; 3; 6\}$.
Par ailleurs, $5 \equiv 2$ [3] ; $5^2 \equiv 1$ [3] et $3 \equiv 0$ [3]. Donc, $2u_n \equiv 2^n$ [3]. Et ce résultat implique que u_n n'est pas divisible par 3 et non plus pas 6.
Par conséquent, $u_n \wedge u_{n+1} = 2$.