Maths Expertes
Entraînement

Arithmétiques

Congruence & PGCD

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

1. Vérifier que $1000 \equiv 1 \ [37]$ et en déduire que pour tout entier naturel n, on a $10^{3n} \equiv 1 \ [37]$.
2. En déduire le reste de la division euclidienne de 1 001 037 par 37.

Exercice 2 :

1. Montrer que $67^{89} - 1$ est un multiple de 11.
2. Pour quelles valeurs de n entier naturel, $5^{2n} + 5^n + 1$ est un multiple de 3 ?

Exercice 3 :

Démontrer que le carré de tout entier naturel est de la forme $5n - 1$ ou $5n$ ou $5n + 1$, n entier naturel.

Exercice 4 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}$.

1. $14x \equiv 3 \ [4]$.
2. $\begin{cases} 3x & \equiv 1 \ [5] \\ 5x & \equiv 2 \ [7] \end{cases}$.

Exercice 5 :

1. Trouver, selon les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 3^n par 8.
2. Quel est l'ensemble des entiers naturels n tels que le nombre $n3^n - 9n + 2$ soit divisible par 8 ?

Exercice 6 :

Montrer que pour tout entier n, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

Exercice 7 :

Déterminer l'ensemble des x entiers relatifs tels que : $x^2 + 3x$ soit divisible par 7.

Exercice 8 :

Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$, le nombre $x = 1 + n + 2n^2 + n^3 + n^4$ n'est pas un nombre premier.

Exercice 9 :

1. Montrer que pour tout couple d'entiers relatifs (a, b), si a et b ne sont pas divisibles par 7 alors $a^2 + b^2$ n'est pas divisible par 7.
2. Montrer que pour tout n entier naturel, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

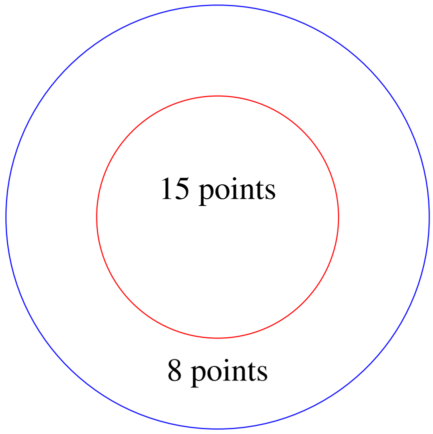
Exercice 10 :

Calculer pour tout entier naturel n non nul.

1. $PGCD(n, 2n+1)$ et $PPCM(n, 2n+1)$.
2. $PGCD(2n+2, 4n+2)$ et $PPCM(2n+2, 4n+2)$.

Exercice 11 :

1. Trouver une solution particulière dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $15x+8y=1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $15x+8y=1000$;
3. De combien de façons peut-on obtenir exactement 1000 points en lançant des fléchettes sur la cible ci-dessous ?



Le nombre de fléchettes n'est pas limité et on suppose qu'elles atteignent toutes les cibles.

Exercice 12 :

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définis par $u_0 = 14$ et $u_{n+1} = 5u_n - 6$; $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, et u_4. Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?
2. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} \equiv u_n \ [4]$.

   (b) En déduire $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{2k} \equiv 2 \ [4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0 \ [4]$.
3. (a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_n \equiv 28[100]$.
4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.
5. Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.