Arithmétique
Avant de commencer

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

1. Démontrer que la somme de deux nombres pairs est un nombre pair.
2. Démontrer que le produit de deux nombres impairs est un nombre impair.
3. Compléter les tableaux suivants.

$+$	Pair	Impair
Pair		
Impair		

$\times$	Pair	Impair
Pair		
Impair		

Exercice 2 :

1. Montrer que 7 et 11 sont la différence de deux carrés.
2. Démontrer que tout entier naturel impair peut s'écrire comme la différence de deux carrés successifs.

Exercice 3 :

2020 peut-il s'exprimer comme la somme de quatre entiers naturels consécutifs ?

Exercice 4 :

Soit (U_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $U_{n+1} = 2^{n+1} + U_n$ et de premier terme $U_0 = 2$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, U_n est pair.

Exercice 5 :

1. Soit n un entier impair et k l'entier tel que $n = 2k+1$.
   (a) Développer $(2k+1)^2$.
   (b) n^2 est-il pair ou impair ?
2. On cherche à montrer que $\sqrt{2}$ ne peut pas être rationnel en montrant que si $\sqrt{2}$ pouvait être égal à une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ (p et q entiers) on aboutirait à une contradiction.
   (a) Montrer que si $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ alors on aurait $p^2 = 2q^2$ et donc que p^2 et p seraient pairs.
   (b) En remplaçant p par $2k$ dans $p^2 = 2q^2$, montrer que si p était pair alors q^2 et q le seraient aussi. La fraction $\frac{p}{q}$ pourrait-elle être alors irréductible ?

Exercice 6 :

n désigne un nombre entier à trois chiffres dont le chiffre des centaines est c, le chiffre des dizaines est d et le chiffre des unités est u.

1. Recopier et compléter : $n = \cdots \times c + \cdots \times d + u$.
2. Expliquer pourquoi le nombre $100c + 10d$ est divisible par 5.

$\boxed{3}$ En déduire que n est divisible par 5 dans le seul cas où son chiffre des unités est 0 ou 5 .

Exercice 7 :

n désigne un nombre entier à trois chiffres dont le chiffre des centaines est c, le chiffre des dizaines est d et le chiffre des unités est u.

$\boxed{1}$ Expliquer pourquoi : $n = 99c + 9d + c + d + u$.

$\boxed{2}$ (a) Expliquer pourquoi le nombre $99c + 9d$ est divisible par 3.

(b) En déduire que n est divisible par 3 dans le seul cas où $c + d + u$ est divisible par 3.

$\boxed{3}$ Démontrer de façon analogue que n est divisible par 9 dans le seul cas où la somme de ses chiffres est divisible par 9 .

Exercice 8 :

n désigne un nombre entier à trois chiffres. Démontrer que n est divisible par 4 dans le seul cas où le nombre formé par les chiffres des dizaines et des unités de n est divisible par 4.

Exercice 9 :

Les nombres de Mersenne.

$\boxed{1}$ (a) Un nombre parfait est un nombre égal à la somme de ses diviseurs positifs stricts. Vérifier que 6 et 28 sont bien des nombres parfaits.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

(c) Pour aborder les nombres parfaits, on utilisera la propriété suivante. « Pour tous entiers a et n supérieurs ou égaux à 2, $a^n - 1$ est divisible par $a - 1$. » Démontrer ce théorème en déterminant la valeur de la somme $1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}$.

$\boxed{2}$ (a) En utilisant la propriété précédente, montrer que si n n'est pas un nombre premier, alors $2^n - 1$ n'est pas un nombre premier.

(b) Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $M_n = 2^n - 1$. Étudier la primalité des nombres M_2, M_3, ... , M_{10}.

(c) À ce stade, on pourrait conjecturer si n est premier, alors M_n est aussi premier. Montrer que M_{11} n'est pas premier, bien que 11 le soit.

Exercice 10 :

Justifier que 2020 est divisible par 5 et par 10. Est-il divisible par 3 ?

Exercice 11 :

Lors d'un tournoi de jeu de société, on compte 60 hommes et 40 femmes inscrits.
Les organisateurs veulent créer des équipes mixtes contenant toutes le même nombre x d'hommes et y de femmes.
Comment les équipes peuvent-elles être constituées sachant qu'une équipe doit comprendre au moins quatre personnes et au plus dix personnes ?