UN PEU DE LOGIQUE

Implication : $p \Rightarrow q$

— On considère la phrase suivante :
« Si j'habite en France, alors j'habite en Europe. »
Cette proposition est vraie. Elle se traduit par :« quelle que soit » la personne habitant en France, alors cette personne habite en Europe.

— L'implication peut s'écrire à l'aide d'un symbole : $\Longrightarrow$.
Il signifie que, si la première partie de la phrase (p) est vraie, alors la seconde (q) l'est aussi.
On dit que la première partie entraîne la seconde.
On note :

$$\text{J'habite en France} \;\Rightarrow\; \text{J'habite en Europe.} \tag{1}$$

Réciproque : $q \Rightarrow p$

La réciproque de la proposition (1) s'écrit : « Si j'habite en Europe alors j'habite en France. »
Cette expression est fausse. Si une implication est vraie, sa réciproque ne l'est pas forcément.

Contraposée : non $q \Rightarrow$ non p ou ($\rceil q \Rightarrow \rceil p$)

— La contraposée de la proposition (1) s'écrit : « Si je n'habite pas en Europe alors je n'habite pas en France. »
Cette expression est vraie, elle est équivalente à la première. Elle s'écrit en inversant les deux parties de la phrase et en prenant leur négation.

— Pour démontrer qu'une implication est vraie, on peut démontrer sa contraposée.

— Pour démontrer qu'une implication est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple.

Équivalence : $p \Leftrightarrow q$

L'équivalence $p \Leftrightarrow q$ est une double implication. Elle signifie à la fois $p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow p$.

Exemple 1 :

Soit la proposition « $ABCD$ est un parallélogramme $\Rightarrow$ $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu. »
Sa réciproque est « $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu $\Rightarrow$ $ABCD$ est un parallélogramme. »
On peut donc écrire : « $ABCD$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu. »

Exemple 2 :

La proposition $(*)$: « ABC est un triangle rectangle en $A \Rightarrow BC^2 = BA^2 + AC^2$. »
La réciproque de $(*)$: « $BC^2 = BA^2 + AC^2 \Rightarrow ABC$ est un triangle rectangle en A. »
La contraposée de $(*)$: « $BC^2 \neq BA^2 + AC^2 \Rightarrow ABC$ n'est pas un triangle rectangle en A. »

Exercice 1 :

Voici plusieurs exemples de phrases qui sont vraies (pour la géométrie, on se limite au plan).

1. Si $x = 5$, alors $x^2 = 25$.
2. Si $a + 5 = -7$, alors $a = -12$.
3. Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $(AB)//(CD)$.
4. Si $[AB]$ et $[CD]$ sont sécants, alors (AB) et (CD) sont sécantes.

Pour chacune de ces phrases :

a) écrire la phrase réciproque ;
b) dire si la phrase réciproque est vraie ou fausse ;
c) écrire la phrase contraposée.

Exercice 2 :

Dans chacun des cas suivants, relier les deux parties de phrase en utilisant les symboles $\Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$.

a) $A + 5 = -2$ $\cdots\cdots$ $A = -7$.

b) $a = 0$ et $b = 0$ $\cdots\cdots$ $ab = 0$.

c) $a = 0$ ou $b = 0$ $\cdots\cdots$ $ab = 0$.

d) a et b sont positifs $\cdots\cdots$ ab est positif.

Exercice 3 :

Indiquer si chaque proposition est vraie ou fausse. Si elle est fausse, donner un contre-exemple.

a) Quel que soit x réel positif, $\sqrt{x}$ est un entier.

b) Quel que soit $x > 9$, $x^2 > 81$.

c) Il existe deux nombres x et y, avec $x < y$, tels que $x^2 > y^2$.

d) Le parallélogramme a deux côtés égaux $\Rightarrow$ C'est un losange.

e) Il existe x, avec $x > 14$, tel que $x^2 < 350$.

Exercice 4 :

Dans chacune des implications suivantes, où a et b sont des nombres réels. Remplacer les pointillés par « et » ou « ou ».

a) $a = 2 \cdots\cdots b = 3 \Rightarrow a^2 + b^2 = 13$.

b) $(a - 2)(a + 4) = 0 \Rightarrow a = 2 \cdots\cdots a = -4$.

c) $ab < 0 \Rightarrow (a < 0 \cdots\cdots b > 0) \cdots\cdots (a > 0 \cdots\cdots b < 0)$.

d) $a > 0 \cdots\cdots b > 0 \Rightarrow ab > 0$.

e) $a \in E \cup F \Rightarrow a \in E \cdots\cdots a \in F$.

f) $a \in E \cap F \Rightarrow a \in E \cdots\cdots a \in F$.

Exercice 5 :

Soit un réel t tel que « $t > -1$ et $t < 2$ ». Cela équivaut à « $t \in]-1; 2[$ ».
La **négation** (le contraire) de cette phrase est : « $t \notin]-1; 2[$ » autrement dit « $t \in]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$ ».
On peut aussi écrire, « $t \leq -1$ ou $t \geq 2$ ».
En s'inspirant de cet exemple, écrire, pour un nombre réel x, la négation de chacune des phrases suivantes.

a) $x \geq 2$ et $x < 3$.

b) $x < 1$ ou $x \geq 2$.

c) $-1 \leq x \leq 1$.

Exercice 6 :

Démontrer la proposition suivante en utilisant sa contraposée :
« x^2 est impair $\Rightarrow$ x est impair. »