Géométrie plane & Repérage

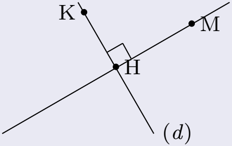
Seconde

maths-mde.fr

1. Projeté orthogonal

Définition : Projeté orthogonal

On appelle projeté orthogonal d'un point M sur une droite (d) avec M extérieur à cette droite, le point H intersection de la droite (d) et de la perpendiculaire à la droite (d) passant par M.



Définition : Distance d'un point à une droite

On appelle distance d'un point M à une droite (d) la longueur MH où H est le projeté orthogonal de M sur la droite (d).

Propriété

La distance d'un point à une droite est la plus courte distance entre le point M et un point de la droite.

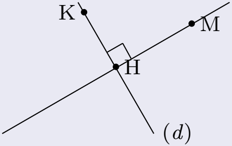
Démonstration

Soit K un point quelconque de la droite (d) distinct de H. Le triangle MHK est rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore on a : $MK^2 = MH^2 + HK^2$.
Or, $HK \neq 0$. Ainsi, $MK^2 > MH^2$ si et seulement si $MK > MH$ (l'équivalence est admise pour l'instant).
Par conséquent, la plus courte distance est bien MH.

1. Projeté orthogonal

Définition : Projeté orthogonal

On appelle projeté orthogonal d'un point M sur une droite (d) avec M extérieur à cette droite, le point H intersection de la droite (d) et de la perpendiculaire à la droite (d) passant par M.



Définition : Distance d'un point à une droite

On appelle distance d'un point M à une droite (d) la longueur MH où H est le projeté orthogonal de M sur la droite (d).

Propriété

La distance d'un point à une droite est la plus courte distance entre le point M et un point de la droite.

Démonstration

Soit K un point quelconque de la droite (d) distinct de H. Le triangle MHK est rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore on a : $MK^2 = MH^2 + HK^2$.
Or, $HK \neq 0$. Ainsi, $MK^2 > MH^2$ si et seulement si $MK > MH$ (l'équivalence est admise pour l'instant).
Par conséquent, la plus courte distance est bien MH.

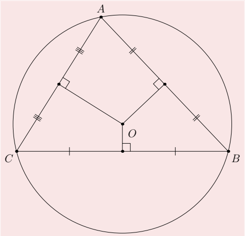
2. Droites remarquables

Définition

La médiatrice est la perpendiculaire à un côté passant par son milieu.

Propriété

Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en un même point O.
Ce point est **le centre du cercle circonscrit** du triangle.



Démonstration

Rappelons qu'un point M est sur la médiatrice de $[AB]$ si et seulement si $MA = MB$.
Ainsi, si O est le point d'intersection des médiatrices de $[AB]$ et de $[BC]$, alors on a $OA = OB$ et $OB = OC$.
Par conséquent, on a aussi $OA = OC$, ce qui implique O est sur la médiatrice de $[AC]$.

Autrement dit, O est le centre du cercle circonscrit.

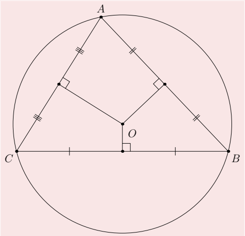
2. Droites remarquables

Définition

La médiatrice est la perpendiculaire à un côté passant par son milieu.

Propriété

Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en un même point O.
Ce point est **le centre du cercle circonscrit** du triangle.



Démonstration

Rappelons qu'un point M est sur la médiatrice de $[AB]$ si et seulement si $MA = MB$.
Ainsi, si O est le point d'intersection des médiatrices de $[AB]$ et de $[BC]$, alors on a $OA = OB$ et $OB = OC$.
Par conséquent, on a aussi $OA = OC$, ce qui implique O est sur la médiatrice de $[AC]$.

Autrement dit, O est le centre du cercle circonscrit.

2. Droites remarquables

Définition

La hauteur est la perpendiculaire à un côté passant par le sommet opposé.

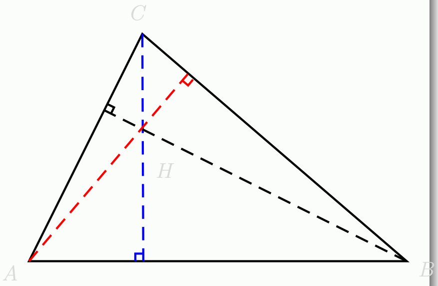
Propriété

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un même point H. Ce point est appelé **l'orthocentre** du triangle.

Démonstration : La figure est à compléter en classe

Soit (AA'), (BB') et (CC') les hauteurs d'un triangle ABC.
Les parallèles aux côtés du triangle ABC, passant par les sommets opposés, forment un triangle $A_1B_1C_1$ où A, B et C sont les milieux des côtés.
Les hauteurs $(A'A)$, $(B'B)$ et $(C'C)$ perpendiculaires aux milieux des côtés du triangle $A_1B_1C_1$ sont les médiatrices de ce triangle. Elles sont concourantes au point H, centre du cercle circonscrit à $A_1B_1C_1$.

Les hauteurs du triangle ABC sont donc concourantes en H.



Définition

La hauteur est la perpendiculaire à un côté passant par le sommet opposé.

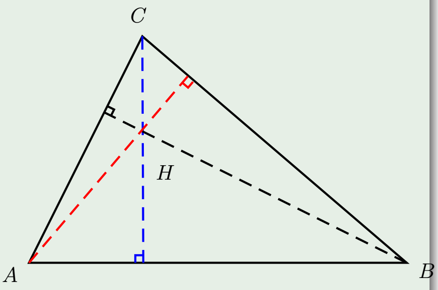
Propriété

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un même point H. Ce point est appelé **l'orthocentre** du triangle.

Démonstration : La figure est à compléter en classe

Soit (AA'), (BB') et (CC') les hauteurs d'un triangle ABC.
Les parallèles aux côtés du triangle ABC, passant par les sommets opposés, forment un triangle $A_1B_1C_1$ où A, B et C sont les milieux des côtés.
Les hauteurs $(A'A)$, $(B'B)$ et $(C'C)$ perpendiculaires aux milieux des côtés du triangle $A_1B_1C_1$ sont les médiatrices de ce triangle. Elles sont concourantes au point H, centre du cercle circonscrit à $A_1B_1C_1$.

Les hauteurs du triangle ABC sont donc concourantes en H.

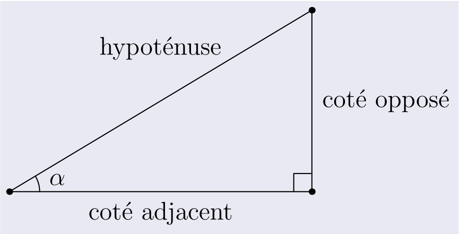


3. Triangle rectangle

Relations trigonométriques

Dans un triangle rectangle :

- $\cos(\alpha) = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$.
- $\sin(\alpha) = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$.
- $\tan(\alpha) = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$.



Théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle : $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.

Démonstration

Selon le théorème de Pythagore, dans un triangle rectangle :

$$\text{hypoténuse}^2 = \text{côté opposé}^2 + \text{côté adjacent}^2.$$

En divisant membre à membre cette égalité par hypoténuse^2, on obtient :

$$\frac{\text{hypoténuse}^2}{\text{hypoténuse}^2} = \frac{\text{côté opposé}^2}{\text{hypoténuse}^2} + \frac{\text{côté adjacent}^2}{\text{hypoténuse}^2}.$$

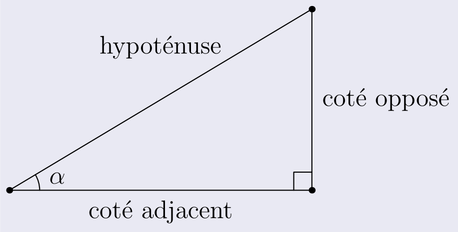
Soit, $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.

3. Triangle rectangle

Relations trigonométriques

Dans un triangle rectangle :

- $\cos(\alpha) = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$.
- $\sin(\alpha) = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$.
- $\tan(\alpha) = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$.



Théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle : $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.

Démonstration

Selon le théorème de Pythagore, dans un triangle rectangle :

$$\text{hypoténuse}^2 = \text{côté opposé}^2 + \text{côté adjacent}^2.$$

En divisant membre à membre cette égalité par hypoténuse^2, on obtient :

$$\frac{\text{hypoténuse}^2}{\text{hypoténuse}^2} = \frac{\text{côté opposé}^2}{\text{hypoténuse}^2} + \frac{\text{côté adjacent}^2}{\text{hypoténuse}^2}.$$

Soit, $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.

4. Triangles semblables

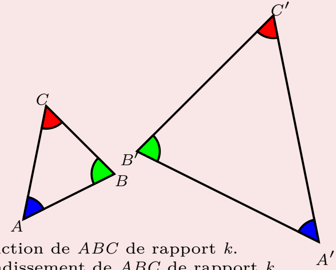
Définition

Deux triangles sont **semblables** si et seulement si leurs angles sont deux à deux de même mesure.

Propriété

Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables si et seulement si les longueurs des côtés opposés aux angles égaux sont proportionnelles. Autrement dit,

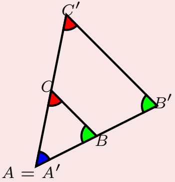
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k.$$



Si $k < 1$, alors $A'B'C'$ est une réduction de ABC de rapport k.
Si $k > 1$, alors $A'B'C'$ est un agrandissement de ABC de rapport k.

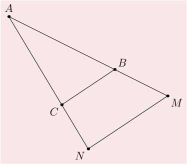
Configuration de Thalès

Dans un triangle $A'B'C'$, si B est sur la droite $(A'B')$, si C est sur la droite $(A'C')$ et si la droite (BC) est parallèle à $(B'C')$ alors $\dfrac{AB}{AB'} = \dfrac{AC}{AC'} = \dfrac{BC}{B'C'}$.



Théorème

Dans un triangle ABC, si M est sur la droite (AB), si N est sur la droite (AC), si A, M, B et A, N, C sont dans le même ordre et si $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ alors $(MN)(BC)$.



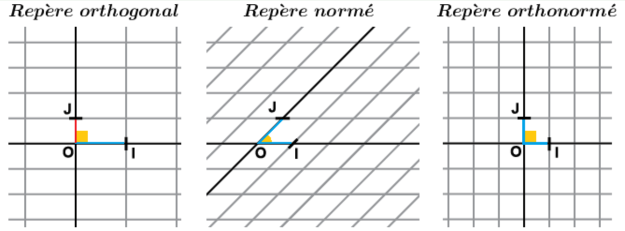
Définition

Soient O, I et J trois points distincts non alignés. $(O; I, J)$ est le repère d'origine O ayant pour axe des abscisses (OI), pour axe des ordonnées (OJ) et tel que I et J sont les points de coordonnées respectives $(1; 0)$ et $(0; 1)$.

Remarque

Les deux cas particuliers qui sont le plus souvent utilisés sont les suivants.

- Si le triangle OIJ est rectangle en O, le repère est dit orthogonal.
- Si le triangle OIJ est isocèle et rectangle en O, le repère est dit orthonormé ou orthonormal.



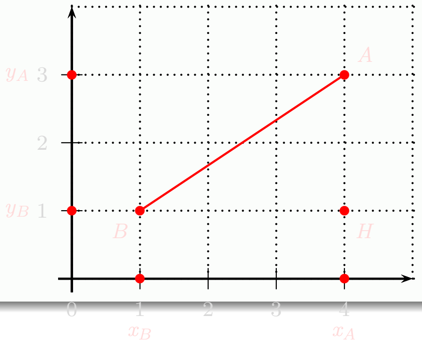
Distance entre deux points

Dans un repère orthonormé, la longueur AB du segment $[AB]$ où $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ est donnée par la relation :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Démonstration

On considère le point H tel que ses coordonnées sont $H(x_A; y_B)$.
Le triangle ABH est rectangle en H. Alors d'après le théorème de Pythagore nous avons :
$AB^2 = AH^2 + HB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$.
Ici,
$AB = \sqrt{(1-4)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{3^2 + (1-3)^2} = \sqrt{13}$.



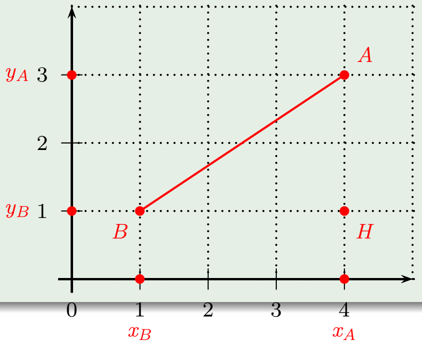
Distance entre deux points

Dans un repère orthonormé, la longueur AB du segment $[AB]$ où $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ est donnée par la relation :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Démonstration

On considère le point H tel que ses coordonnées sont $H(x_A; y_B)$.
Le triangle ABH est rectangle en H. Alors d'après le théorème de Pythagore nous avons :
$AB^2 = AH^2 + HB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$.
Ici,
$AB = \sqrt{(1-4)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{3^2 + (1-3)^2} = \sqrt{13}$.



Coordonnées du milieu d'un segment

Dans un repère quelconque, le milieu d'un segment $[AB]$ où $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Exemple

Soient $A(3; -1)$ et $B(-2; 5)$ deux points d'un plan muni d'un repère orthonormé, alors le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{3 + (-2)}{2}; \frac{-1 + 5}{2}\right)$, soit $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.