Vecteurs dans un plan

Seconde

maths-mde.fr

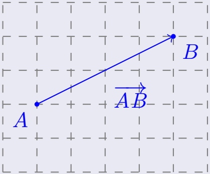
Cours pour élève à imprimer

1. Translations et vecteurs associés

Définition

Soient A et B deux points du plan.

- La translation qui transforme A en B est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Si $A \neq B$, on représente le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par une flèche d'origine A et d'extrémité B.
- Si les points A et B sont confondus, on parle alors de vecteur nul, noté $\overrightarrow{0}$.



Caractéristiques d'un vecteur

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

- sa direction, celle de la droite (AB) ;
- son sens, allant de A vers B, soit de l'origine vers l'extrémité ;
- sa norme $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$, soit la longueur du segment $[AB]$.

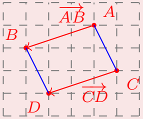
Définition

Deux vecteurs ayant la même direction, le même sens et la même norme sont dits égaux.

1. Translations et vecteurs associés

Propriété

Soient A, B, C et D des points du plan tels que avec $A \neq B$.
$ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



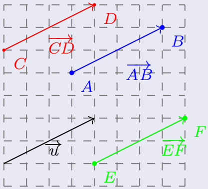
Démonstration

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction, le même sens et la même norme. Cela signifie que les côtés opposés $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles et de même longueur.

Autrement dit, le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

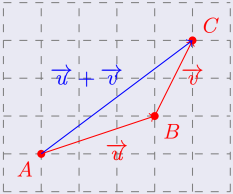
Le vecteur $\overrightarrow{u}$ et ses représentants

Lorsque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, on dit que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont des représentants d'un même vecteur qu'on peut également noter avec une seule lettre minuscule $\overrightarrow{u}$ indépendamment des deux points.
Ainsi, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.

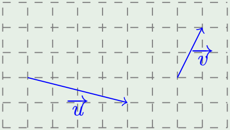


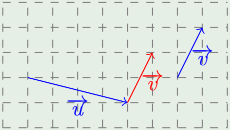
Vecteur somme

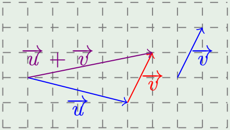
La somme des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, notée $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, est le vecteur associé à la translation obtenue par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.



Méthode de construction de $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$



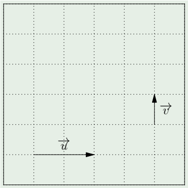


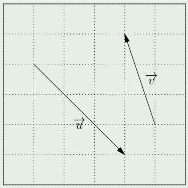


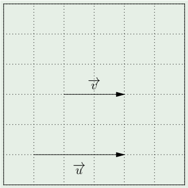
1. Par une translation, on place l'origine d'un représentant de $\overrightarrow{v}$ à l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{u}$.
2. Le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ s'obtient en joignant l'origine de $\overrightarrow{u}$ avec l'extrémité du représentant de $\overrightarrow{v}$.

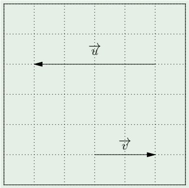
2. Somme et différence de deux vecteurs

Exemples : Tracer $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

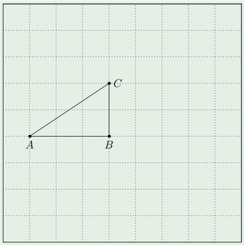


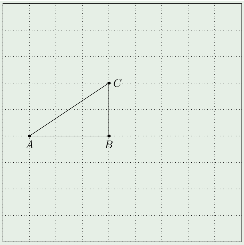


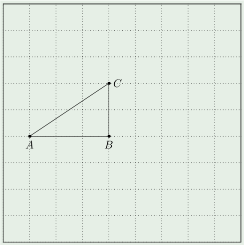




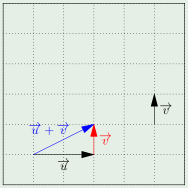
Exemples : Tracer $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$

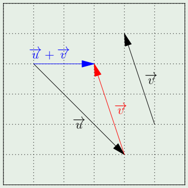


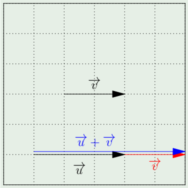


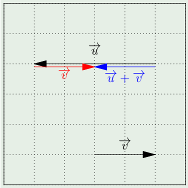


Exemples : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ (Corrigés)

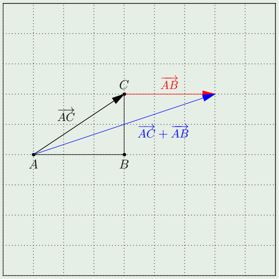


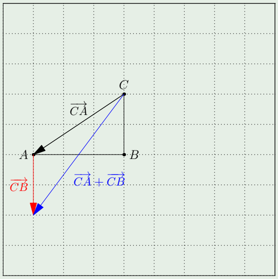


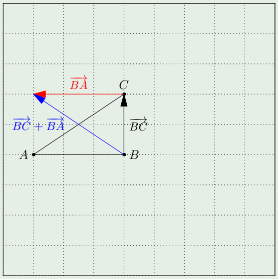




Exemples : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$ (Corrigés)



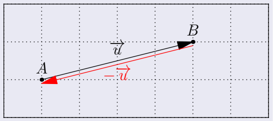




2. Somme et différence de deux vecteurs

Vecteur opposé

Le vecteur opposé du vecteur $\overrightarrow{u}$, noté $-\overrightarrow{u}$, est le vecteur qui possède la même direction et la même norme mais un sens opposé.



Remarques

- $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.
- $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.
- Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ n'a ni direction, ni sens et il est de longueur nulle.

Différence de deux vecteurs

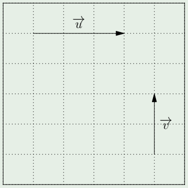
Le vecteur $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ est défini par la somme $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$.

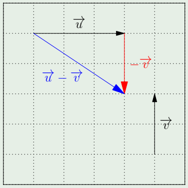
Cela signifie que soustraire un vecteur revient à additionner son opposé.

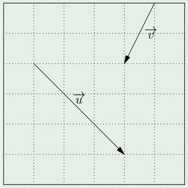
Remarque

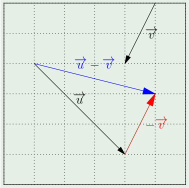
$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$.

Exemples : Tracer $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$









Propriétés

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$:

- La somme est commutative c-à-d $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.
- $\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}$.
- La somme d'un vecteur et de son opposé est le vecteur nul.
- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$.

3. Relation de Chasles

Propriété

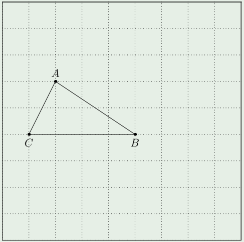
Soient A, B, C trois points.
L'enchaînement de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ donne la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
Autrement dit, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Exemples

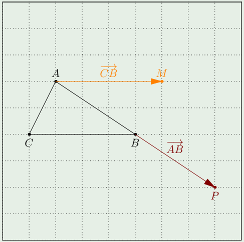
Simplification des expressions en utilisant la relation de Chasles :

1. $\overrightarrow{A\underline{B}} + \overrightarrow{\underline{B}C} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A\underline{C}} + \overrightarrow{\underline{C}D} = \overrightarrow{AD}$.
2. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{A\underline{C}} + \overrightarrow{\underline{C}B} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{A\underline{B}} + \overrightarrow{\underline{B}A} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.
3. $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B\underline{E}} + \overrightarrow{\underline{E}C} + \overrightarrow{C\underline{A}} + \overrightarrow{\underline{A}D} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{B\underline{C}} + \overrightarrow{\underline{C}D} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{B\underline{D}} + \overrightarrow{\underline{D}B} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{0}$.

Simplifier et placer les points M et P tels que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{PB} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.



$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$.
$\overrightarrow{PB} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$.

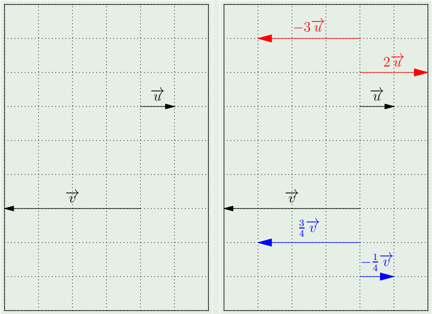


Propriété

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et k un nombre réel non nul, alors le vecteur $k\overrightarrow{u}$ résultant de la multiplication de $\overrightarrow{u}$ par k, est défini par :

- sa direction : la même que celle de $\overrightarrow{u}$,
- son sens : ce lui de $\overrightarrow{u}$ si $k > 0$, l'opposé de celui de $\overrightarrow{u}$ si $k < 0$.
- sa norme : $\| k\overrightarrow{u} \| = | k | \, \| k\overrightarrow{u} \|$.

Exemples : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs définis comme suit. Construire $2\overrightarrow{u}$, $-3\overrightarrow{u}$, $\frac{3}{4}\overrightarrow{v}$ et $-\frac{1}{4}\overrightarrow{v}$.



Propriétés

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et pour tous réels k et k' :

- $k\left(k'\overrightarrow{u}\right) = \left(kk'\right)\overrightarrow{u}$.
- $k\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$.
- $(k + k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$.

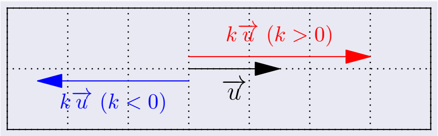
Exemples : Simplification

- $\frac{1}{2}\overrightarrow{u} - \frac{1}{3}\overrightarrow{u} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{3}\overrightarrow{u} - \frac{1}{3} \times \frac{2}{2}\overrightarrow{u} = \frac{3}{6}\overrightarrow{u} - \frac{2}{6}\overrightarrow{u} = \frac{1}{6}\overrightarrow{u}$.
- $3\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} - 2\left(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right) = 2\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v} - 2\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
- $3\left(2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right) - 2\left(3\overrightarrow{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{v}\right) = 6\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v} - 6\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = -4\overrightarrow{v}$.

5. Vecteurs colinéaires & Vecteur directeur

Définition

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits colinéaires, s'il existe un nombre réel non nul k tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.
k est appelé coefficient de colinéarité.

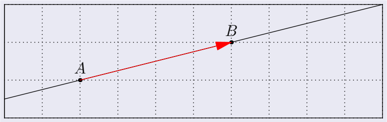


Remarque

$\overrightarrow{0}$ est colinéaire à tout vecteur. En effet, si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou si $k = 0$, alors $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Définition

On appelle **vecteur directeur** d'une droite tout vecteur formé par deux points distincts de la droite.



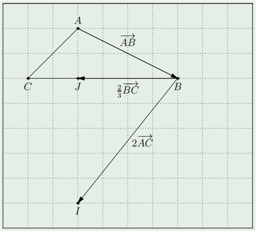
Propriété

Si les vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires alors on peut en déduire que les points A, B et C sont alignés.

Exemple 1

Soient I et J deux points tels que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.
Montrer que les points A, I et J sont alignés revient à montrer que que les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires.
En utilisant la relation de Chasles on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AJ} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AB} + \tfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \tfrac{3}{3}\overrightarrow{AB} - \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}\\ &= \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right) = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AI}\end{aligned}$$



Les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont donc colinéaires. Par conséquent, les points A, I et J sont alignés.

5. Vecteurs colinéaires & Vecteur directeur

Propriété

Si les vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires alors on peut en déduire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exemple 2

Soient M et P deux points tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.
Montrer que les droites (MP) et (AC) sont parallèles revient à montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MP} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} \\
&= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} \\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
&= \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont alors colinéaires. Par conséquent, les droites (MP) et (AC) sont parallèles.