Vecteurs dans un repère

Seconde

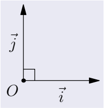
maths-mde.fr
Cours à imprimer pour élève

1. Base, repère et coordonnées

Définition

Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires du plan dont les directions sont perpendiculaires et tels que $\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = 1$.

- Le couple $(\vec{i}, \vec{j})$ est appelé base orthonormée des vecteurs du plan.
- Le triplet $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est appelé le repère du plan, où O est un point de ce plan, appelé l'origine.



Définition

On appelle **coordonnées** d'un vecteur $\vec{u}$ dans une base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ l'unique couple de réels (x, y) tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. x est appelé **abscisse** de $\vec{u}$ et y est appelé **ordonnée** de $\vec{u}$.

Notation : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $\vec{u}(x, y)$.

Autrement dit, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

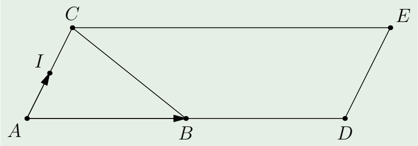
Propriété

Dans une base orthonormée $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$, deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées.

Autrement dit, les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont égaux si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.

Exemple

Dans la figure ci-dessous, $ADEC$ est un parallélogramme, B est le milieu de $[AD]$ et I est le milieu de $[AC]$.



Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont par définition non colinéaires.
Posons $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{j}$.
$\left(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ forme un repère du plan d'origine A. Nous avons alors :

- $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- $\overrightarrow{DI} = -2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} \Leftrightarrow \overrightarrow{DI}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Propriétés

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs définis, dans une base orthonormée $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.

- Les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ s'obtiennent en additionnant les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, autrement dit :
$$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}.$$
- Les coordonnées du vecteur $\vec{u}-\vec{v}$ s'obtiennent en soustrayant les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, autrement dit :
$$\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \end{pmatrix}.$$

Exemple

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ deux vecteurs définis, dans une base orthonormée $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.

$\begin{pmatrix} -1+2 \\ 3+4 \end{pmatrix}$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$. Soit, $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} -1-2 \\ 3-4 \end{pmatrix}$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}-\vec{v}$. Soit, $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Propriété

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur défini dans une base orthonormée $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ et k un nombre réel.

- Les coordonnées du vecteur $k\vec{u}$ s'obtiennent en multipliant les coordonnées de $\vec{u}$ par k, autrement dit :

$$k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}.$$

- $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ sont les coordonnées du vecteur opposé $-\vec{u}$ de $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Exemples

Dans une base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$, si $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors :

$3\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1\times 3 \\ \leftarrow 2\times 3 \end{matrix}$;

$-4\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow -4\times 1 \\ \leftarrow -4\times 2 \end{matrix}$;

$3\vec{u}-2\vec{v}\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 3\times 1-2\times(-3) \\ \leftarrow 3\times 2-2\times 0 \end{matrix}$.

4. Norme d'un vecteur

Propriété

Dans une base orthonormée $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$, la norme d'un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est : $\| \vec{u} \| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exemples

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$.

Propriété

Dans une base orthonormée $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Si $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$, alors :

- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix}$.
- La norme de $\overrightarrow{AB}$ est alors donnée par la formule $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

5. Colinéarité de vecteurs

Définition

Dans une base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$, on appelle **déterminant** des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ le réel noté $\det(\vec{u}, \vec{v})$ défini par : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$.

Exemples

- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 1 \times 3 = 5$.
- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 3 \\ 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} - 1 \times 3 = -1$.

Propriété

Dans une base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$, deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Démonstration : Dans le cas de deux vecteurs non nuls.

- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires, autrement dit, il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v} \Rightarrow x = kx'$ et $y = ky' \Rightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = x \times y' - y \times x' = kx' \times y' - ky' \times x' = 0$.
- Si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ alors on a $x \times y' - y \times x' = 0 \Rightarrow x \times y' = y \times x'$.
  En supposant que $x \neq 0$, on en déduit que $y' = \frac{x'}{x} \times y$. Or, comme on a aussi $x' = \frac{x'}{x} \times x$, on peut en conclure que $\vec{v} = \frac{x'}{x}\vec{u}$ et que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

5. Colinéarité de vecteurs

Propriété

Deux droites (AB) et (MN) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires.
Autrement dit si et seulement si $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}) = 0$.

Exemples

Soient $A(2;3)$, $B(5;4)$, $M(5;1)$ et $N(-1;-1)$ des points d'un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5-2 \\ 4-3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -1-5 \\ -1-1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$.
Or, $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}) = 3 \times (-2) - 1 \times (-6) = -6 + 6 = 0$. Donc les deux $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaire et par conséquent les deux droites (AB) et (MN) sont parallèles.

Propriété

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$.

Exemples

Dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, les points $A\begin{pmatrix} -12 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 12 \\ 52 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 72 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont alignés. En effet,

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 12-(-12) \\ \leftarrow 52-3 \end{matrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 72-(-12) \\ \leftarrow 1-3 \end{matrix}$.

Or, $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -12 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times (-2) - (-\frac{1}{2}) \times 4 = 0$.
Par conséquent, les points A, B et C sont alignés.