Signe d'une fonction

Seconde

maths-mde.fr

Cours pour élève à imprimer

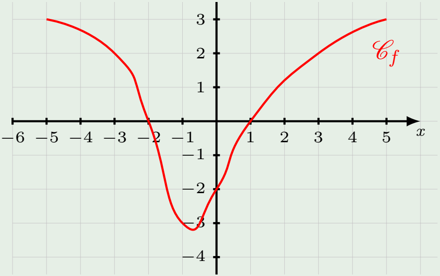
1. Étude du signe d'une fonction

Définition

L'étude du signe d'une fonction permet de savoir quand la fonction est positive, négative ou nulle. Pour une fonction f sur un ensemble I.

- Le signe est positif si $f(x) > 0$, pour tout dans I.
- Le signe est négatif si $f(x) < 0$, pour tout dans I.
- Le signe est nul pour les valeurs de x telles que $f(x) = 0$.

Exemple : f est une fonction définie sur $[-5\,;\,5]$ par sa courbe ci-dessous.

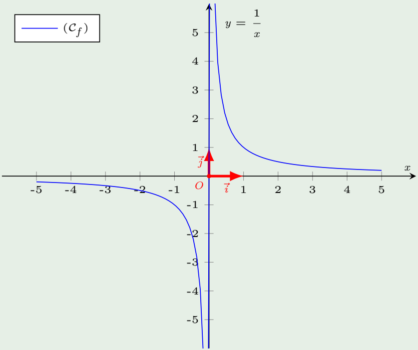


- Le signe de $f(x)$ est strictement positif si $x \in [-5; -2[\cup]1; 5]$.
- Le signe de $f(x)$ est strictement négatif si $x \in]-2; 1[$.
- Le signe de $f(x)$ est nul si $x = -5$ ou $x = 1$.

On peut présenter ces résultats dans un tableau de signes.

x	-5		-2		1		5
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exemple : g est une fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$



- Le signe de $g(x)$ est strictement positif si $x > 0$.
- Le signe de $f(x)$ est strictement négatif si $x < 0$.

Tableau de signes.

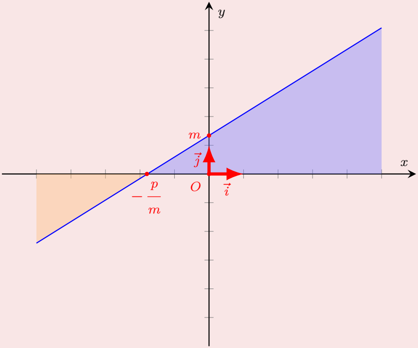
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	||	$+$

Propriété

Soit m et p deux nombres réels avec $m \neq 0$.

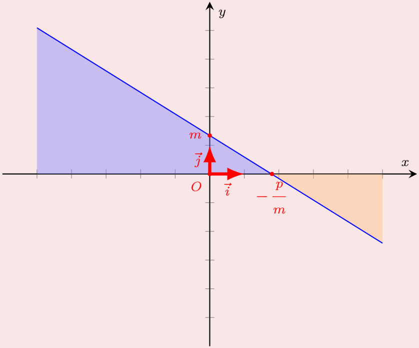
La fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ s'annule et change de signe en $x = \dfrac{-p}{m}$.

Si $m > 0$, f est croissante.



x	$-\infty$		$-\dfrac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Si $m < 0$, f est décroissante.



x	$-\infty$		$-\dfrac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Exemples

- Signe de $f(x) = 4x - 8$.
  $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2$.
  Le coefficient directeur 4 est positif, donc f est croissante et le « + » est mis après le « 0 ».

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

- Signe de $g(x) = 9 - 3x$.
  $g(x) = 0 \Leftrightarrow 9 - 3x = 0 \Leftrightarrow 9 = 3x \Leftrightarrow x = 3$.
  Le coefficient directeur -3 est négatif, donc g est décroissante et le « + » est mis avant le « 0 »

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

3. Signe d'un produit

Règle

Pour déterminer le signe du produit de deux fonctions, on construit un tableau de signes à 4 lignes.

- Sur la première ligne, on note le domaine de définition et les valeurs de x qui annulent chaque facteur.
- Une ligne pour chaque facteur pour déterminer son signe.
- Une dernière ligne pour déterminer le signe du produit obtenu en appliquant la règle des signes.

Exemple : Signe de $h(x) = f(x)g(x) = (4x-8)(9-3x)$.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, $h(x) > 0$ pour tout x de $]2;3[$ et $h(x) < 0$ pour tout x de $]-\infty;2[\cup]3;+\infty[$.

4. Signe d'un quotient

Règle

Pour déterminer le signe du quotient de deux fonctions, on construit un tableau de signes à 4 lignes.

- Sur la première ligne, on note les valeurs de x qui annulent numérateur et dénominateur.
- Une ligne pour donner le signe du numérateur.
- Une ligne pour donner le signe du dénominateur.
- Une dernière ligne pour déterminer le signe du quotient obtenu en appliquant la règle des signes.

Exemple : Signe de $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{4x-8}{9-3x}$.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$+$		$+$	‖	$-$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

Ainsi, $h(x) > 0$ pour tout x de $]2;3[$ et $h(x) < 0$ pour tout x de $]-\infty;2[\,\cup\,]3;+\infty[$.