Probabilités

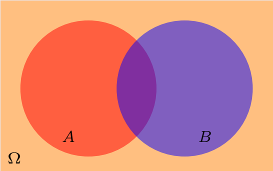
Seconde

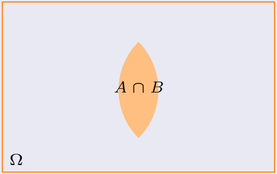
maths-mde.fr

Cours pour élève à imprimer

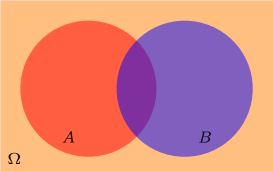
1. Vocabulaire

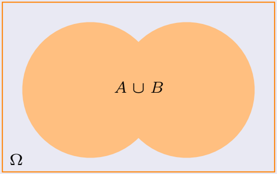
- Une expérience est dite **aléatoire** lorsqu'on ne peut pas en prévoir avec certitude le résultat.
- On appelle **univers**, l'ensemble noté Ω de tous les résultats possibles.
- On appelle **événement**, toute partie de l'univers.
- On appelle **événement élémentaire**, tout événement ne comportant qu'un seul élément.
- L'événement $A \cap B$, autrement dit « A et B », est l'événement formé de tous les résultats possibles appartenant à A et à B.



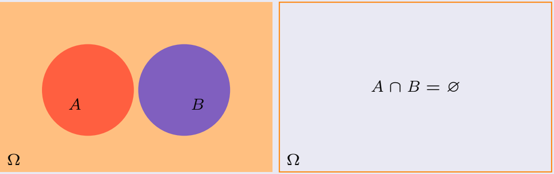


- L'événement $A \cup B$, autrement dit « A ou B », est l'événement formé de tous les résultats possibles appartenant à A ou à B.

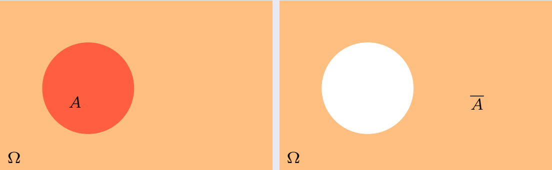




- Deux événements sont dits **incompatibles** ou disjoints si leur intersection est vide.



- On appelle **événement contraire** d'un événement A, l'événement noté $\overline{A}$ formé de tous les résultats possibles n'appartenant pas à A.



- L'événement correspondant à l'ensemble vide est dit **événement impossible**.
- L'événement correspondant à l'univers est dit **événement certain**.

Exemple

On considère un tirage au hazard d'une carte dans un jeu de 32 cartes.

- L'univers Ω est l'ensemble formé des 32 cartes.
- « Obtenir un as » est un événement.
- « Obtenir un as de pique » est un événement élémentaire.
- Soient A l'événement : « obtenir un as » et B l'événement : « obtenir un coeur ».
  - L'evénement $A \cap B$ correspond à « obtenir un as **et** un coeur ».
  - L'evénement $A \cup B$ correspond à « obtenir un as **ou** un coeur ».
- Les deux événements « obtenir un coeur » et « obtenir un trèfle » sont incompatibles.
- Soit R l'événement « obtenir une carte rouge ». $\overline{B}$: « obtenir une carte noire » est l'événement contraire.
- « obtenir un 2 » est événement impossible.
- « obtenir une carte rouge ou noire » est un événement certain.

2. Loi de probabilité et modélisation

Définition

Définir une **loi de probabilité** associée à une expérience aléatoire revient à associer à chaque événement élémentaire un nombre compris entre 0 et 1, appelé probabilité, de sorte que la somme des probabilités de tous les événements élémentaires soit égale à 1.

Définition

- **Modéliser** une expérience aléatoire, c'est lui associer une loi de probabilité donnant les probabilités des événements élémentaires.
- Le choix d'une modélisation doit suivre la « loi des grands nombres » qui stipule que si on répète un grand nombre de fois de façon identique et indépendante une expérience aléatoire, la fréquence d'observation d'un événement doit « tendre » vers la probabilité de cet événement établi par le modèle choisi.

Exemples

- La loi de probabilité associée au lancer d'une pièce de monnaie équilibrée.

Événement élémentaire	obtenir pile	obtenir face
Probabilité	$0,5$	$0,5$

- Pour définir la loi de probabilité associée au lancer d'une punaise, on répéte l'expérience aléatoire un grand nombre de fois et on prend comme probabilité, la fréquence observée.
Si on constate à titre d'exemple que la punaise tombe sur la tête dans 32% des cas, on peut définir la loi de probabilité comme suit.

Événement élémentaire	tomber sur la tête	tomber sur la pointe
Probabilité	$0,32$	$0,68$

3. Probabilité d'un événement

Propriétés

La loi probabilité associée à une expérience aléatoire définie sur un univers Ω vérifie :

- $p\left(\varnothing\right) = 0$.
- $p\left(\Omega\right) = 1$.
- Pour tout événement A, $0 \leqslant p\left(A\right) \leqslant 1$.
- Si un événement A est inclus dans un événement B, $p\left(A\right) \leqslant p\left(B\right)$.
- Pour tout événement A, $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p\left(A\right)$.
- Si deux événements A et B sont incompatibles, $p\left(A \cup B\right) = p\left(A\right) + p\left(B\right)$.
- Si A et B ne sont pas incompatibles, $p\left(A \cup B\right) = p\left(A\right) + p\left(B\right) - p\left(A \cap B\right)$.

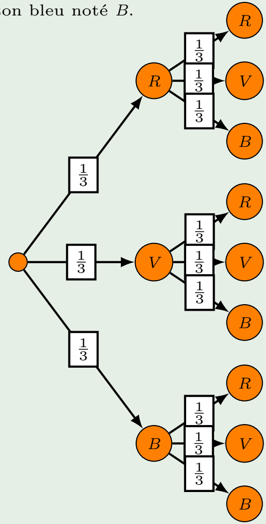
Exemples

On tire au hasard une carte de façon équiprobable dans un jeu de 32 cartes et on note.
⋆ A l'événement « la carte tirée est un as ».
⋆ B l'événement « la carte tirée est un carreau ».
⋆ C l'événement « la carte tirée est une figure (valet, dame, roi) ».
On a alors :

- $p(A) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$; $p(B) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$; $p(C) = \dfrac{12}{32} = \dfrac{3}{8}$; $p(A \cap B) = \dfrac{1}{32}$.
- $p\left(A \cup B\right) = p\left(A\right) + p\left(B\right) - p\left(A \cap B\right) = \dfrac{4}{32} + \dfrac{8}{32} - \dfrac{1}{32} = \dfrac{11}{32}$.
- $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p\left(A\right) = \dfrac{7}{8}$.
- $p\left(A \cup C\right) = p\left(A\right) + p\left(C\right) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{2}$.

Exemple : Tirages successifs avec remise

Une boite contient 3 jetons : un rouge noté R, un vert noté V et un jeton bleu noté B.



On tire au hasard un premier jeton que l'on remet dans la boite avant de tirer un deuxième jeton.

Le nombre des issues possibles est égal à 9.

- p (« obtenir deux jetons rouges ») $= \dfrac{1}{9}$.
- p (« obtenir au moins un jeton rouge ») $= \dfrac{5}{9}$.

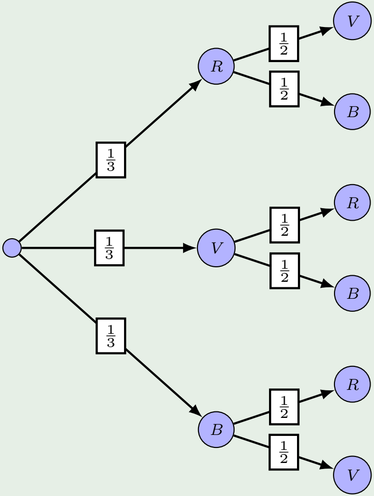
Exemple : Tirages successifs sans remise

Une boite contient 3 jetons : un rouge noté R, un vert noté V et un jeton bleu noté B.

On tire au hasard un premier jeton puis un deuxième sans remettre le premier dans la boite.

Le nombre d'issues possibles est égal à 6.

- p (« obtenir jetons rouges ») $= 0$.
- p (« obtenir au moins un jeton rouge ») $= \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.



5. Échantillon et Fluctuation

Définition

Lorsque l'on réalise plusieurs fois une même expérience aléatoire de manière indépendante, l'ensemble des résultats obtenus est appelé **échantillon**.

Le nombre de fois où l'expérience est réalisée est appelée **taille** de l'échantillon.

Exemple

Si l'on lance 100 fois un dé équilibré à 6 faces et qu'on observe le résultat obtenu, on obtient un échantillon de taille 100.

Définition

Deux échantillons de même taille associés à une même expérience aléatoire ne sont, a priori, pas identiques.
Ce phénomène s'appelle la **fluctuation** d'échantillonnage.

Exemple

Si l'on lance dix fois un dé à 6 faces puis que l'on recommence, les résultats des dix premiers lancers ne seront pas identiques aux dix suivants.

Propriété

On considère un échantillon de taille n associé à une expérience aléatoire dont l'une des issues a pour probabilité p.
Pour n suffisamment grand, sauf exception, la fréquence observée f de cette issue dans l'échantillon est souvent proche de sa probabilité p avec un écart inférieur ou égal à $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Exemple

On a lancé 1 000 fois un dé à 6 faces et on a obtenu 159 fois le nombre 6. La fréquence observée de 6 est égale à $f = \frac{159}{1000} = 0,159$.

Ce réultat est assez proche de la probabilité d'obtenir 6, soit $\dfrac{1}{6}$.

L'écart entre p et f est inférieur à $\dfrac{1}{\sqrt{1000}} \approx 0,032$. En effet, $p - f = \frac{1}{6} - 0,159 \approx 0,008 < 0,032$.