Inégalités & Intervalles

Seconde

maths-mde.fr

Cours pour élève à imprimer

1. Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ et règles d'opérations sur les inégalités

Définition

Pour tous réels x et y, dire que x **est inférieur ou égal à** y signifie que $(y - x)$ est positif.
Notation : $x \leqslant y$.

Remarques

- On dit que x est **strictement inférieur à** y lorsque $(y - x)$ est strictement positif. Notation : $x < y$.
- Si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$ alors on a $x \leqslant z$.
- Si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$ alors on a $x = y$.
- Si $a \leqslant x$ et $x \leqslant b$ alors on peut écrire que $a \leqslant x \leqslant b$, on dit qu'on a un encadrement de x.

Propriétés : Inégalités & Somme

Soient x, y, z et t quatre nombres réels.

- Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité conserve l'ordre de l'inégalité. Autrement dit, $x \leqslant y \Leftrightarrow x \pm z \leqslant y \pm z$.
- Si $x < y$ et $z < t$ alors $x + z < y + t$.

Exemples

- $x \leqslant 4 \overset{+2}{\Leftrightarrow} x + 2 \leqslant$.
- $x \leqslant -5 \overset{-4}{\Leftrightarrow} x - 4 \leqslant -5 - 4 \Leftrightarrow x - 4 \leqslant -9$.
- Si $x \leqslant -1$ et $x' \leqslant \dfrac{1}{2}$ alors $x + x' \leqslant -1 + \dfrac{1}{2}$.
- Si $\dfrac{3}{4} \leqslant x$ et $-2 \leqslant x'$ alors $\dfrac{3}{4} - 2 \leqslant x + x'$.

1. Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ et règles d'opérations sur les inégalités

Attention !

Ne jamais soustraire membre à membre deux inégalités.

Contre-exemple :

On a bien $5 < 7$ et $4 < 9$ mais $5 - 4 = 1$ n'est pas inférieur à $7 - 9 = -2$.

Propriétés : Inégalités & Multiplication

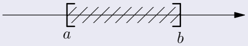
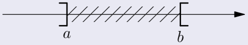
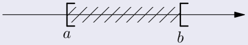
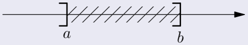
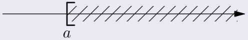
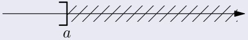
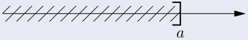
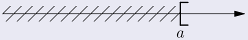
Soient x, y, z et t quatre nombres réels.

- Multiplier ou diviser par un même nombre strictement positif conserve l'ordre de l'inégalité.
  Autrement dit, Si $z > 0$ et $x \leqslant y$ alors $zx \leqslant zy$ et $\dfrac{x}{z} \leqslant \dfrac{y}{z}$.
- Multiplier ou diviser par un même nombre strictement négatif ne conserve pas l'ordre de l'inégalité.
  Autrement dit, Si $z < 0$ et $x \leqslant y$ alors $zx \geqslant zy$ et $\dfrac{x}{z} \geqslant \dfrac{y}{z}$.

Exemples

- $\dfrac{7}{2} \leqslant x \overset{\times 8}{\Leftrightarrow} 8 \times \frac{7}{2} \leqslant 8x \Leftrightarrow 28 \leqslant 8x.$
- $3x \leqslant -6 \overset{\times \frac{1}{3}}{\Leftrightarrow} x \leqslant \frac{1}{3} \times (-6) \Leftrightarrow x \leqslant -2.$
- $x \leqslant 5 \overset{\times(-3)}{\Leftrightarrow} -3x \geqslant -3 \times 5 \Leftrightarrow -3x \geqslant -15.$
- $x \leqslant -\frac{8}{3} \overset{\times\left(-\frac{3}{4}\right)}{\Leftrightarrow} -\frac{3}{4}x \geqslant -\frac{3}{4} \times \left(-\frac{8}{3}\right) \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x \geqslant 2.$

2. Intervalles dans $\mathbb{R}$

Intervalle	Définition	Schéma sur la droite des réels
$[a\ ;\ b]$	Tous les x compris entre a inclus et b inclus. Autrement dit, $a \leqslant x \leqslant b$.	
$]a\ ;\ b[$	Tous les x est compris entre a exclu et b exclu. Autrement dit, $a < x < b$.	
$[a\ ;\ b[$	Tous les x est compris entre a inclus et b exclu. Autrement dit, $a \leqslant x < b$.	
$]a\ ;\ b]$	Tous les x est compris entre a exclu et b inclus. Autrement dit, $a < x \leqslant b$.	
$[a\ ;\ +\infty[$	Tout x supérieur ou égal à a. Autrement dit, $x \geqslant a$.	
$]a\ ;\ +\infty[$	Tout x supérieur strictement à a. Autrement dit, $x > a$	
$]-\infty\ ;\ a]$	Tout x inférieur ou égal à a. Autrement dit, $x \leqslant a$	
$]-\infty\ ;\ a[$	Tout x inférieur strictement à a. Autrement dit, $x < a$	

2. Intervalles dans $\mathbb{R}$

Définitions

- Si le 1er crochet est [la borne inférieure de l'intervalle est dite fermée, sinon elle est dite ouverte.
- Si le 2^{e} crochet est] la borne supérieure de l'intervalle est dite fermée, sinon elle est dite ouverte.

Exemples

L'ensemble des nombres réels :

- compris entre 2 inclus et 5 inclus est noté $[2;5]$.
- supérieurs strictement à 4 s'écrit $]4;+\infty[$.
- inférieurs ou égaux à 10 s'écrit $]-\infty;10]$.
- compris entre -6 exclu et 2 inclus s'écrit $]-6;2]$.

Remarques

- $\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$, $-\infty$ et $+\infty$ désignent respectivement « moins l'infini » et « plus l'infini ».
- Le crochet est toujours vers l'extérieur en $-\infty$ et $+\infty$.
- $\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$ et $\mathbb{R}^- =]-\infty;0]$.

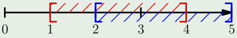
2. Intervalles dans $\mathbb{R}$

Définitions : Intersection et réunion de deux intervalles

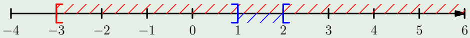
- L'intersection de deux intervalles A et B est l'ensemble noté $A \cap B$ qui contient les nombres qui appartiennent à A et à B.
- La réunion de deux intervalles A et B est l'ensemble noté $A \cup B$ qui contient les nombres qui appartiennent à A ou à B.

Exemples

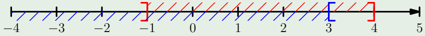
- $\mathbb{R}^- \cap \mathbb{R}^+ = \{0\}$ et $\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}$.
- $[1\ ;\ 4] \cap [2\ ;\ 5] = [2\ ;\ 4]$



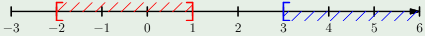
- $[-3\ ;\ +\infty[\ \cap\ ]1\ ;\ 2[\ =\ ]1\ ;\ 2[$.



- $]-1\ ;\ 4] \cap]-\infty\ ;\ 3[\ =\ ]-1\ ;\ 3[$.



$[-2\ ;\ 1] \cap [3\ ;\ +\infty[\ = \varnothing$, le symbole $\varnothing$ désigne l'ensemble vide.



3. Résolution d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}$

Définition

- Une inéquation est une inégalité qui dépend d'une inconnue voire plusieurs inconnues.
- Résoudre une inéquation revient à déterminer l'ensemble de toutes les valeurs de l'inconnue vérifiant l'inégalité.

Exemples

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x + 3 < 3x - 4$:

$$\begin{aligned} 2x + 3 < 3x - 4 &\Leftrightarrow 2x - 3x < -4 - 3 \\ &\Leftrightarrow -x < -7 \\ &\Leftrightarrow x > 7. \text{ (En divisant par } -1 \text{ le sens de l'inégalité change.)} \end{aligned}$$

$S =]7\,;\,+\infty[\,.$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x - \frac{1}{2} \geqslant 4(x+1)$:

$$\begin{aligned} x - \tfrac{1}{2} \geqslant 4(x+1) &\Leftrightarrow x - \tfrac{1}{2} \geqslant 4x + 4 \\ &\Leftrightarrow x - 4x \geqslant 4 + \tfrac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow -3x \geqslant \tfrac{9}{2} \\ &\Leftrightarrow x \leqslant \frac{\frac{9}{2}}{-3} \text{ (En divisant par } -3 \text{ le sens de l'inégalité ne change pas.)} \\ &\Leftrightarrow x \leqslant -\tfrac{3}{2}. \end{aligned}$$

$S = \left]-\infty\,;\,-\frac{3}{2}\right].$

4. La valeur absolue d'un réel

Définition

On appelle **valeur absolue** d'un réel x, le réel noté $|x|$, tel que :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Autrement dit, la valeur absolue d'un nombre est égale à lui-même si ce nombre est positif et est égale à son opposé si ce nombre est négatif.

Exemples

- $|2| = 2$ car 2 est positif.
- $|-3| = 3$ car -3 est négatif.
- $|0| = 0$.
- $\left|1 - \sqrt{2}\right| = -1 + \sqrt{2}$ car $1 - \sqrt{2}$ est négatif.

Remarques

La valeur absolue d'un nombre est toujours positive ou nulle.

5. La distance sur la droite des réels

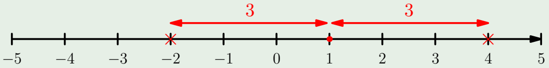
Définition

Soient A et B les points d'abscisses a et b sur une droite munie d'une origine et d'une graduation.
La distance entre les réels a et b est donnée par l'expression : $AB = d(a, b) = |b - a|$.

$$|b - a| = \begin{cases} b - a & \text{si } b \geqslant a \\ a - b & \text{si } b < a \end{cases} .$$

Exemples

1. La distance entre 1 et -3 est égale à $1 - (-3) = 1 + 3 = 4$.
2. La distance entre 7 et $2,5$ est égale à $7 - 2,5 = 4,5$.
3. Déterminer les réels x tels que $|x - 1| = 3$ revient à déterminer sur un axe les points d'abscisse x tels que $d(x, 1) = 3$. On en déduit que $|x - 1| = 3 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 4$.



4. Déterminer les réels x tels que $|x + 1| \leqslant 2$ revient à déterminer sur un axe les points d'abscisse x tels que $d(x, -1) \leqslant 2$ car $|x + 1| = |x - (-1)|$. On en déduit que $|x + 1| \leqslant 2 \Leftrightarrow x \in [-3\,;\,1]$.