Généralités sur les fonctions

Seconde

maths-mde.fr
Cours pour élève à imprimer

1. Notion de fonction

Définition

Soit D un ensemble, un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

- Une fonction f définie sur D est une relation qui à tout x de D associe un **unique** réel, noté $f(x)$ et appelé **image** de x par f.
- L'ensemble de définition D de la fonction f est l'ensemble des nombres pour lesquels il existe une image par la fonction.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 3$.

- 3 est l'image de 0 par f. En effet, $f(0) = 2 \times 0^2 + 3 = 3$.
- 5 est l'image de 1 par f. En effet, $f(1) = 2 \times 1^2 + 3 = 5$.

Définition

On considère une fonction f définie sur D.

On appelle **antécédents** de b par f, tous les réels x de D tels que $f(x) = b$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.

- 0 est le seul antécédent de 1 par f. En effet, $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- 2 et -2 sont les deux antécédents de 5 par f. En effet, $f(x) = 5 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$.

Définition

Soit f une fonction, D son ensemble de définition et x un élément de D.
Un **tableau de valeurs** d'une fonction f donne, sur la première ligne, différentes valeurs de x désignant des antécédents et, en vis-à-vis sur la deuxième ligne, les images $f(x)$ qui leur sont associées.

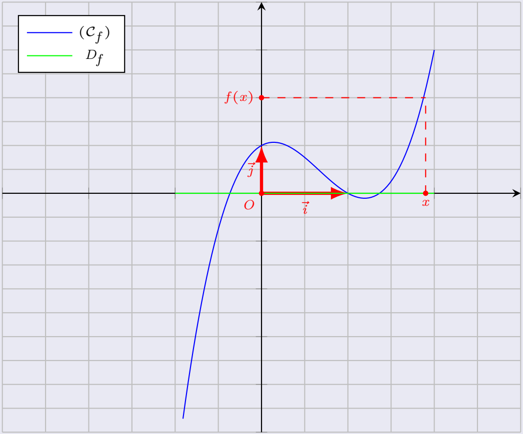
Exemple

La fonction $f : x \to \dfrac{-8}{5}x^2 + 8x$ admet le tableau de valeurs ci-après.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$	0	3.6	6.4	8.4	9.6	10	9.6	8.4	6.4	3.6	0

2. Courbe représentative d'une fonction

Dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on appelle courbe représentative de la fonction f définie sur D_f, l'ensemble des points **d'abscisse** x **et d'ordonnée** $f(x)$ pour tous les x de D_f.



C_f désigne la courbe de la fonction f.

$y = f(x)$ est une équation cartésienne de la courbe C_f.

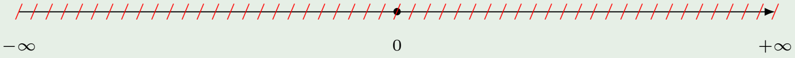
3. Fonction paire et fonction impaire

Définition

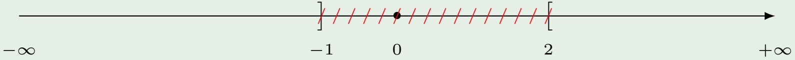
Un ensemble I de $\mathbb{R}$ est dit symétrique par rapport à 0 si pour tout x de I, $-x$ est aussi dans I.

Exemples

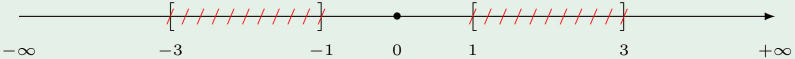
- $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.



- $]-1\,;\,2[$ n'est pas symétrique par rapport à 0. En effet, $1 \in\,]-1\,;\,2[$ et $1 \notin\,]-1\,;\,2[$.



- $[-3\,;\,-1] \cup [1\,;\,3]$ est symétrique par rapport à 0.



Définition

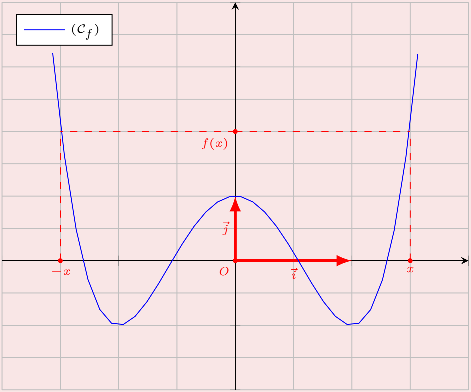
Une fonction f définie sur un ensemble I de $\mathbb{R}$ est dite **paire** si I est symétrique par rapport à 0 et si, pour tout x de I, on a $f(-x) = f(x)$.

Exemples

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2$ est paire. En effet, $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f(-x) = 5(-x)^2 = 5x^2 = f(x)$.
2. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$ n'est pas paire. En effet, $\mathbb{R}$ est bien symétrique par rapport à 0 mais, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f(-x) = 2(-x) + 1 = -2x + 1 \neq f(x)$.

Propriété

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction f paire est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.



Définition

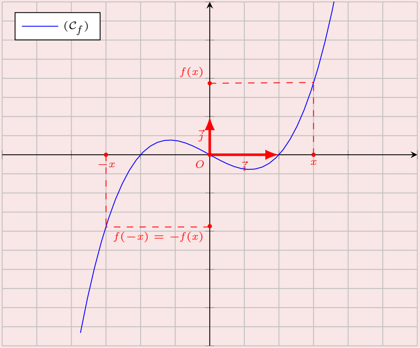
Une fonction f définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ est dite **impaire** si I est symétrique par rapport à 0 et si, pour tout x de I, on a $f(-x) = -f(x)$.

Exemple

La fonction f définie sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2}{x}$ est impaire car $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout x de $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$, on a $f(-x) = \dfrac{2}{-x} = -\dfrac{2}{x} = -f(x)$.

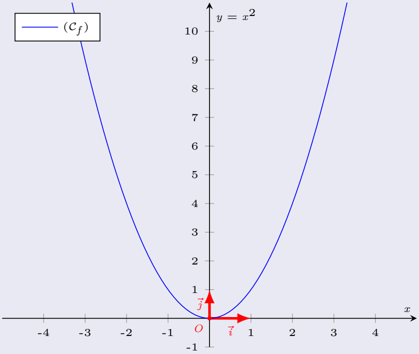
Propriété

La courbe représentative d'une fonction f impaire est symétrique par rapport à l'origine O du repère.



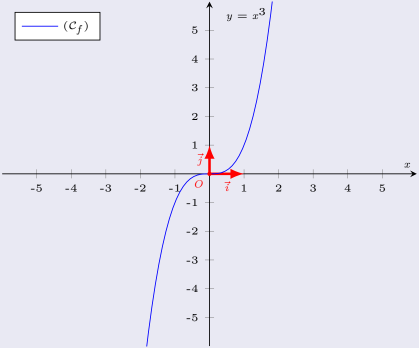
a. Fonction carré

- La fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
- Sa courbe représentative est une parabole.
- La fonction carrée est paire. En effet, $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout x, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.



b. Fonction cube

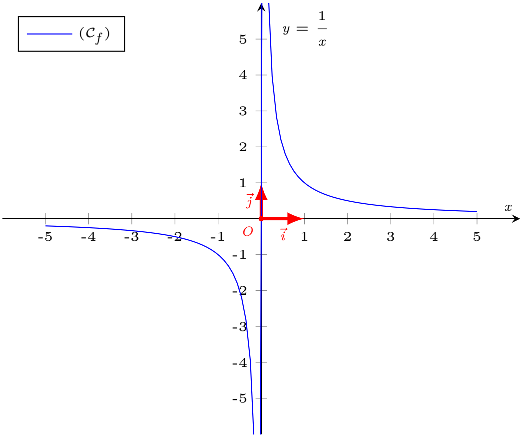
- La fonction cube est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
- La fonction cube est impaire. En effet, $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout $\mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 \times x^3 = -x^3 = -f(x)$.
- Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère O.



- La fonction inverse est définie sur $]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

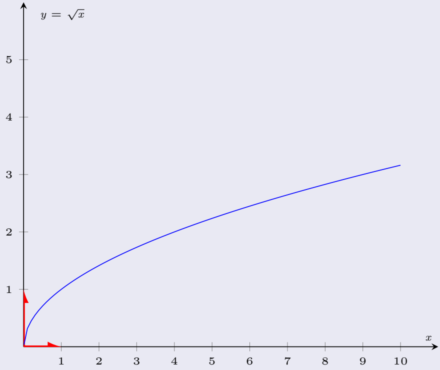
- Sa courbe représentative est une hyperbole.

- La fonction inverse est impaire. En effet, $]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout $x \neq 0$, $f(-x) = \frac{1}{-x} = -f(x)$.



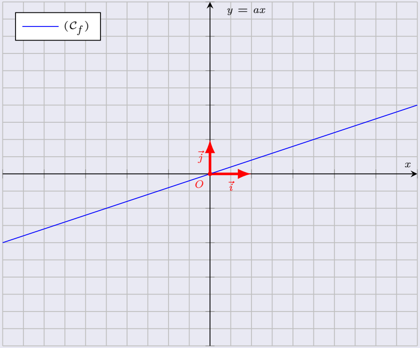
d. Fonction racine carrée

- La fonction racine carrée est définie sur $[0\,; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
- Sa courbe représentative est donnée ci-après.

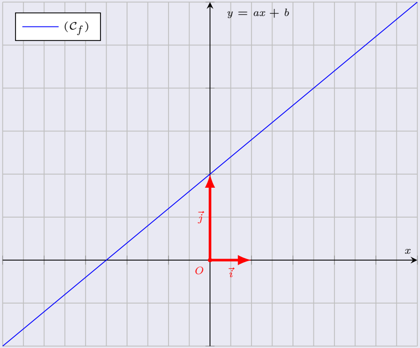


e. Fonction linéaire

- La fonction linéaire est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax$.
- Sa courbe représentative est une droite passant par l'origine.
- Elle représente une situation de proportionnalité.
- a est son coefficient directeur, son coefficient de proportionnalité.
- Elle est impaire. En effet, $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout x, $f(-x) = a(-x) = -ax = -f(x)$.



- La fonction affine est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
- Sa courbe représentative est une droite qui ne passe par l'origine.
- a est son coefficient directeur et b est l'ordonnée à l'origine.

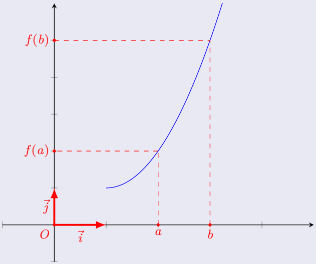


Définitions

- Une fonction f est dite **croissante** sur un intervalle I si, pour **tous** les réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) \leqslant f(b)$.
- Une fonction f est dite **décroissante** sur un intervalle I si, pour **tous** les réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) \geqslant f(b)$.
- Quand une fonction reste croissante ou décroissante sur un intervalle, on dit qu'elle est monotone sur cet intervalle.

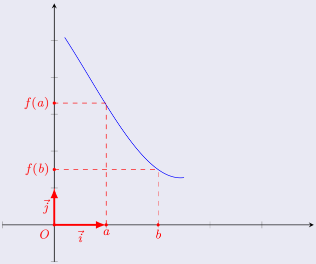
Graphiquement

Fonction croissante



$a \leq b \Longrightarrow f(a) \leq f(b)$.

Fonction décroissante



$a \leq b \Longrightarrow f(a) \geq f(b)$.

Tableau de variation

Fonction croissante

x	a		b
$f(x)$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$

Fonction décroissante

x	a		b
$f(x)$	$f(a)$	$\searrow$	$f(b)$

Définition

- Si, pour **tous** les réels a et b de I tels que $a < b$, $f(a) < f(b)$ on dit alors que f est **strictement croissante** sur I.
- Si, pour **tous** les réels a et b de I tels que $a < b$, $f(a) > f(b)$ dans la définition, on dit alors que f est **strictement décroissante** sur I.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 1$.

- *Étude du sens de variation de f sur $]-\infty\,;\,0[$:*
  Pour tous réels a et b dans $]-\infty\,;\,0[$ tels que $b - a > 0$, on a :
  $$f(b) - f(a) = 3b^2 + 1 - 3a^2 - 1 = 3\left(b^2 - a^2\right) = 3\underbrace{(b-a)}_{>0} \times \underbrace{(b+a)}_{\substack{<0 \\ \text{car } b<0 \text{ et } a<0}}.$$
  Ainsi, $f(b) - f(a) < 0$ sur $]-\infty\,;\,0[$.
  Autrement dit, f est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$.
- *Étude du sens de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$:*
  Pour tous réels a et b dans $]0\,;\,+\infty[$ tels que $b - a > 0$, on a :
  $$f(b) - f(a) = 3b^2 + 1 - 3a^2 - 1 = 3\left(b^2 - a^2\right) = 3\underbrace{(b-a)}_{>0} \times \underbrace{(b+a)}_{\substack{>0 \\ \text{car } b>0 \text{ et } a>0}}.$$
  Ainsi, $f(b) - f(a) > 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
  Autrement dit, f est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
- *Tableau de variations :*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f(0) = 1$	$\nearrow$	

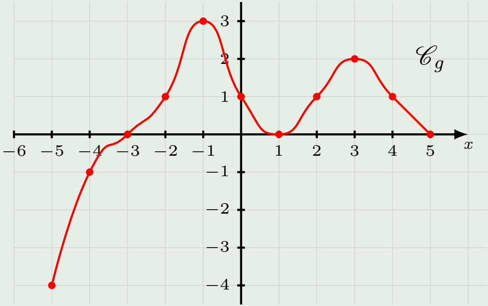
6. Extremum d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f admet un **minimum** m sur I, s'il existe a de I tel que $f(a) = m$ et $f(x) \geqslant m$, pour tout x de I.
- On dit que f admet un **maximum** M sur I, s'il existe b de I tel que $f(b) = M$ et $f(x) \leqslant M$, pour tout x de I.

Exemple : Une fonction g est définie sur $[-5\,;\,5]$ par sa courbe ci-dessous.

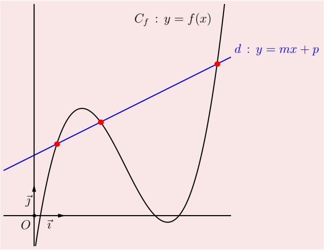


- $g(-1) = 3$, autrement dit 3 est l'image de -1 par g.
- -2, 0, 2 et 4 sont les antécédents de 1 par la fonction g.
- g admet un minimum sur $[-5\,;\,5]$ en $x = -5$.
- g admet un minimum sur $[-4\,;\,3]$ en $x = -4$.
- g admet un maximum sur $[-5\,;\,5]$ en $x = -1$.
- g admet un maximum sur $[1\,;\,5]$ en $x = 3$.

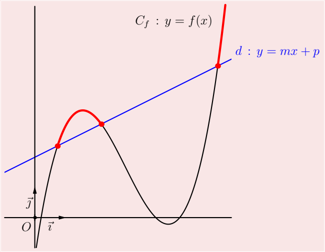
Propriétés

Soient f une fonction définie sur un ensemble I de $\mathbb{R}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère.

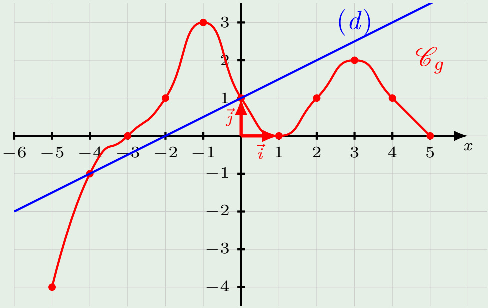
- Les solutions sur I de l'équation $f(x) = mx + p$ sont les abscisses des points d'intersection entre la courbe C_f et la droite (d) d'équation $y = mx + p$.



- Les solutions sur I de l'inéquation $f(x) \geqslant mx + p$ sont les abscisses des points de la courbe C_f situés au dessus et sur la droite (d) d'équation $y = mx + p$.



Exemple : Soient g une fonction est définie sur $[-5\,;\,5]$ par sa courbe ci-dessous et (d) la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2} + 1$.



- 0 et −4 sont les solutions de l'équation $g(x) = \dfrac{x}{2} + 1$.
- L'ensemble $[-4, 0]$ représente les solutions de l'inéquation $g(x) \geq \dfrac{x}{2} + 1$.
- L'ensemble $[-5, -4] \cup [0, 5]$ représente les solutions de l'inéquation $g(x) \leq \dfrac{x}{2} + 1$.