Calcul algébrique & Équation

Seconde

maths-mde.fr

Cours pour élève à imprimer

1. Identités remarquables

Propriétés

Pour tous les a et b dans $\mathbb{R}$:

- $\overset{\xrightarrow{\text{développer}}}{\underset{\xleftarrow{\text{factoriser}}}{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}}$.
- $\overset{\xrightarrow{\text{développer}}}{\underset{\xleftarrow{\text{factoriser}}}{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}}$.
- $\overset{\xrightarrow{\text{développer}}}{\underset{\xleftarrow{\text{factoriser}}}{(a-b)(a+b) = a^2 - b^2}}$.

Démonstrations

- $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
- $(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$.

Exemples : Développer en utilisant les identités remarquables

- $(x+3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$.
- $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 5 + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$.
- $(4-x)^2 = 4^2 - 2 \times 4 \times x + x^2 = 16 - 8x + x^2$.
- $(2x-6)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 6 + 6^2 = 4x^2 - 24x + 36$.
- $(x-\sqrt{3})^2 = x^2 - 2 \times x \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$.
- $(7-x)(7+x) = 7^2 - x^2 = 49 - x^2$.
- $(5x-1)(5x+1) = (5x)^2 - 1^2 = 25x^2 - 1$.

Exemples : Factoriser en utilisant les identités remarquables

- $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$.
- $9 - 4x^2 = 3^2 - (2x)^2 = (3-2x)(3+2x)$.
- $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 = (x+5)^2$.
- $x^2 - 14x + 49 = x^2 - 2 \times x \times 7 + 7^2 = (x-7)^2$.

2. Équation de type $ax + b = 0$

Définition

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $ax + b = 0$, avec $a \neq 0$, c'est déterminer l'ensemble S de tous les réels x vérifiant cette égalité $ax + b = 0$.

Exemples

1. Résolution de l'équation $2x + 3 = 0$:
   $2x+3 = 0 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = \dfrac{-3}{2}$. Ainsi, $S = \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$.
2. Résolution de l'équation $3x - 4 = 0$:
   $3x-4 = 0 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$. Ainsi, $S = \left\{\dfrac{4}{3}\right\}$.
3. Résolution de l'équation $-\dfrac{1}{2}x + 7 = 0$:
   $-\dfrac{1}{2}x+7 = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}x = -7 \Leftrightarrow x = \dfrac{-7}{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = -7 \times (-2) = 14$. Ainsi, $S = \{14\}$.
4. Résolution de l'équation $7x = 0$:
   $7x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{0}{7} \Leftrightarrow x = 0$. Ainsi, $S = \{0\}$.

Propriété

Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors l'équation $ax + b = 0$ n'admet pas de solution.

3. Équation pouvant s'écrire sous la forme $ax+b=0$

Exemples : Équation type $ax+b=cx+d$

1. Résolution de l'équation $2x-4=5x+1$:
   • On regroupe d'un côté tous les termes qui dépendent de x et tout le reste dans l'autre :
   $2x-4=5x+1 \Leftrightarrow 2x-5x=1+4 \Leftrightarrow -3x=5$.
   • Il n'y a plus qu'à diviser par le coefficient de x :
   $-3x=5 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{-3}$.
   Ainsi, $S=\left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$.
2. Résolution de $2(x+3)=x-1$:
   On développe le premier membre de l'équation et on retrouve un cas similaire à l'exemple précédent.
   $2(x+3)=x-1 \Leftrightarrow 2x+6=x-1 \Leftrightarrow 2x-x=-1-6 \Leftrightarrow x=-7$.
   Ainsi, $S=\{-7\}$.
3. Résolution de l'équation $3(x-1)-2(3+x)=6x+12$:
   $3(x-1)-2(3+x)=6x+12 \Leftrightarrow 3x-3-6-2x=6x+12$
   $\Leftrightarrow x-9=6x+12 \Leftrightarrow x-6x=12+9 \Leftrightarrow -5x=21 \Leftrightarrow x=\dfrac{21}{-5}=-\dfrac{21}{5}$.
   Ainsi, $S=\left\{-\dfrac{21}{5}\right\}$.

Propriété

Si $a=0$, $c=0$ et $b\neq d$ alors l'équation $ax+b=cx+d$ n'admet pas de solution.

3. Équation pouvant s'écrire sous la forme $ax + b = 0$

Propriété

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est égal à 0 et son dénominateur est non nul.

Attention !

Comme nous ne pouvons pas diviser par 0, le calcul de type $\dfrac{x+a}{x+b}$ ne peut pas être effectué quand $x = -b$.
On parle alors de valeur interdite ou d'une forme indéterminée.

Rappel : Produit en croix

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow A \times D = B \times C.$$

Exemple 1 : Résolution de l'équation $\dfrac{2-x}{x-1} = 2$.

1 est la valeur interdite, en effet, il faut que $x - 1 \neq 0$. Autrement dit, $x \neq 1$. Dans ces conditions,

$$\begin{aligned}
\frac{2-x}{x-1} = 2 &\Leftrightarrow 2 - x = 2 \times (x-1) \\
&\Leftrightarrow 2 - x = 2x - 2 \\
&\Leftrightarrow 2 + 2 = 2x + x \\
&\Leftrightarrow 4 = 3x \\
&\Leftrightarrow \tfrac{4}{3} = x. \text{ Ainsi, } \quad S = \left\{\tfrac{4}{3}\right\}.
\end{aligned}$$

Exemple 2 : Résolution de l'équation $\dfrac{12}{x+1}=3$.

-1 est la valeur interdite. En effet, il faut que $x+1\neq 0$. Autrement dit, $x\neq -1$. Dans ces conditions,

$$\begin{aligned}\frac{12}{x+1}=3 &\Leftrightarrow 12=3\times(x+1)\\ &\Leftrightarrow 12=3x+3\\ &\Leftrightarrow 12-3=3x\\ &\Leftrightarrow 9=3x \Leftrightarrow \tfrac{9}{3}=x.\ \text{Ainsi, } S=\{3\}.\end{aligned}$$

Exemple 3 : Résolution de l'équation $\dfrac{3}{x+2}=\dfrac{4}{3x}$.

-2 et 0 sont des valeurs interdites. En effet, il faut que $x+2\neq 0$ et $3x\neq 0$. Autrement dit, $x\neq -2$ et $x\neq 0$. Dans ces conditions,

$$\begin{aligned}\frac{3}{x+2}=\frac{4}{3x} &\Leftrightarrow 3\times 3x=4\times(x+2)\\ &\Leftrightarrow 9x=4x+8\\ &\Leftrightarrow 9x-4x=8\\ &\Leftrightarrow 5x=8\\ &\Leftrightarrow \tfrac{8}{5}=x.\ \text{Ainsi, } S=\left\{\tfrac{8}{5}\right\}.\end{aligned}$$

4. Résolution de l'équation $\dfrac{1}{x} = k$ avec $x \neq 0$ et $k \in \mathbb{R}$

Propriétés

- Si $k = 0$, l'équation $\dfrac{1}{x} = k$ n'admet pas de solution.
- Si $k \neq 0$, l'équation $\dfrac{1}{x} = k$ admet une seule solution réelle $x = \dfrac{1}{k}$.

Démonstration

0 est la valeur interdite, le dénominateur ne peut être nul.

- Si $k = 0$, $\dfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow 1 = x \times 0 = 0 \Rightarrow 1 = 0$, ce qui est absurde. Par conséquent cette équation n'admet pas de solution.
- Si $k \neq 0$, $\dfrac{1}{x} = k \iff \dfrac{1}{x} - k = 0 \iff \dfrac{1-kx}{x} = 0 \iff 1 - kx = 0 \iff x = \dfrac{1}{k}$.
  Ainsi, $\dfrac{1}{k}$ est la solution de cette équation. Autrement dit, $S = \left\{\dfrac{1}{k}\right\}$, avec $k \neq 0$.

Exemple

- L'équation $\dfrac{1}{x} = 5$ a pour solution $x = \dfrac{1}{5}$.
- L'équation $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{3}$ a pour solution $x = \dfrac{1}{\frac{1}{3}} = 3$.

5. Équation produit nul

Propriété

Si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

$$\boxed{\text{Si } A \times B = 0 \text{ alors } A = 0 \text{ ou } B = 0.}$$

Exemples

1. Résolution de l'équation $(2x-8)(6-3x)=0$.

$$\begin{aligned}(2x-8)(6-3x)=0 &\Leftrightarrow 2x-8=0 \text{ ou } 6-3x=0\\ &\Leftrightarrow 2x=8 \text{ ou } -3x=-6\\ &\Leftrightarrow x=\frac{8}{2}=4 \text{ ou } x=\frac{-6}{-3}=2.\ \text{Ainsi,}\quad S=\{4\ ;\ 2\}\end{aligned}$$

2. Résolution de l'équation $(2x+5)\left(3-\frac{x}{2}\right)=0$.

$$\begin{aligned}(2x+5)\left(3-\tfrac{x}{2}\right)=0 &\Leftrightarrow 2x+5=0 \text{ ou } 3-\tfrac{x}{2}=0\\ &\Leftrightarrow 2x=-5 \text{ ou } -\tfrac{1}{2}x=-3\\ &\Leftrightarrow x=\frac{-5}{2}=-\frac{5}{2} \text{ ou } x=\frac{-3}{-\frac{1}{2}}=3\times 2=6.\ \text{Ainsi,}\quad S=\left\{-\frac{5}{2}\ ;\ 6\right\}\end{aligned}$$

Exemple

Résolution de $\dfrac{(2x+3)^2-9}{x}=0$.

0 est une valeur interdite. Autrement dit, il faut $x \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{(2x+3)^2-9}{x}=0 &\Leftrightarrow (2x+3)^2-9=0\times x \\
&\Leftrightarrow (2x+3)^2-9=0 \\
&\Leftrightarrow (2x+3)^2-3^2=0 \quad \text{(présence de la forme } a^2-b^2\text{)} \\
&\Leftrightarrow [(2x+3)-3]\,[(2x+3)+3]=0 \\
&\Leftrightarrow 2x(2x+6)=0 \quad \text{(présence d'un produit égal à 0)} \\
&\Leftrightarrow 2x=0 \text{ ou } 2x+6=0 \\
&\Leftrightarrow x=\tfrac{0}{2}=0 \text{ ou } 2x=-6 \\
&\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=\tfrac{-6}{2}=-3
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$S=\{-3\}\,.$$

6. Équation du type $x^2 = a$

Propriété

Les solutions de l'équation $x^2 = a$, avec $a > 0$, sont :

$$\boxed{-\sqrt{a} \text{ et } \sqrt{a}.}$$

Si a est négatif l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Exemples

1. Résolution de l'équation $x^2 = 4$.
   $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{4} = 2$ ou $x = -\sqrt{4} = -2$. Ainsi, $S = \{2 ; -2\}$
2. Résolution de l'équation $x^2 = -3$.
   Cette équation n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, $S = \varnothing$.
3. Résolution de $(x-3)^2 = 25$.

$$\begin{aligned}(x-3)^2 = 25 &\Leftrightarrow x - 3 = \sqrt{25} \text{ ou } x - 3 = -\sqrt{25}\\ &\Leftrightarrow x-3 = 5 \text{ ou } x-3 = -5\\ &\Leftrightarrow x = 5+3 \text{ ou } x = -5+3\\ &\Leftrightarrow x = 8 \text{ ou } x = -2. \text{ Ainsi, } S = \{8 ; -2\}.\end{aligned}$$