Droites du plan et systèmes d'équations

Seconde

maths-mde.fr

Cours à imprimer pour élève

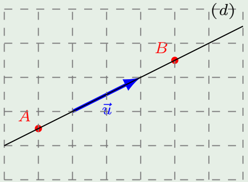
1. Vecteur directeur d'une droite

Définition (Rappel)

Soient A et B deux points distincts d'une droite (d) alors tout vecteur $\overrightarrow{u}$ colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé vecteur directeur de la droite (d).

Exemple

Soient $A(-1;-0,5)$ et $B(3;1,5)$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et donc le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (AB).



Propriété

Dans un repère d'un plan, $M(x, y)$ est un point d'une doite (d) dont le vecteur direceur est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.
$ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de cette droite.

Démonstration

$$\begin{aligned}
A(x_A; y_A) \in (d) &\iff \text{les vecteurs } \overrightarrow{AM} \;\; et \;\; \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires} \\
&\iff \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = 0 \\
&\iff \begin{vmatrix} x - x_A & -b \\ y - y_A & a \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \\
&\iff ax + by - ax_A - by_A = 0 \\
&\iff ax + by + c = 0, \text{avec} - ax_A - by_A = c.
\end{aligned}$$

Propriété

L'ensemble des points dont les coordonnées x et y vérifient l'équation $ax + by + c = 0$ est une droite dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, avec a et b de réels non nuls.

Exemple 1

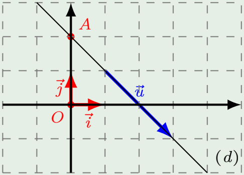
(d) est une droite dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette droite.

Donc, $-2x - 2y + c = 0$ est une équation cartésienne de cette doite, avec c un réel constant.

Or, $A(0; 2) \in (d)$. Ainsi, $-2 \times 0 - 2 \times 2 + c = 0$, soit $c = 4$.

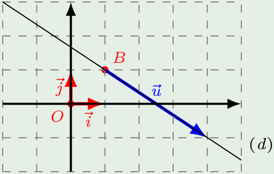
Par conséquent, $-2x - 2y + 4 = 0$ est une équation cartésienne représentant la droite (d).



Exemple 2

Dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, $2x + 3y - 5 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (d).

Donc, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette droite.



Remarque

Une droite admet une infinité d'équations cartésiennes équivalentes.

En effet, pour tout réel $k \neq 0$, $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow k\,(ax + by + c) = 0$.

3. Équation réduite d'une droite

Soit $ax + by + c = 0$ une équation réduite d'une droite (d).

- Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors l'équation cartésienne devient $y = -\dfrac{c}{b}$.
- Si $b = 0$ et $a \neq 0$ alors l'équation cartésienne devient $c = -\dfrac{c}{a}$.
- Si $b \neq 0$ alors l'équation cartésienne devient $y = -\dfrac{b}{a}x - \dfrac{c}{a}$.

Définition

- Toute droite non verticale a une équation réduite de la forme $y = mx + p$ où m s'appelle le coefficient directeur, p l'ordonnée à l'origine et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ un vecteur directeur.
- Toute droite verticale a une équation réduite de la forme $x = k$.

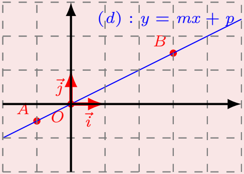
Remarque

Seules les droites non verticales ont une équation qui peut s'écrire sous forme d'une équation réduite.

Propriété

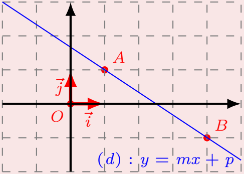
Soit m le coefficient directeur de la droite d'équation réduite $y = mx + p$.

- Si $m > 0$ alors la droite « monte ».
- Si $m < 0$ alors la droite « descend ».
- Si $m = 0$ alors la droite est parallèle à l'axe des abscisses.



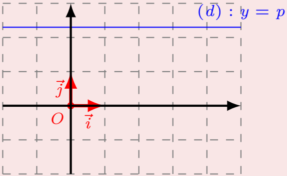
$m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1,5 - (-0,5)}{3 - (-1)} = \dfrac{2}{4}$

$m > 0$



$m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{4 - 1}{-1 - 1} = \dfrac{3}{-2}$

$m < 0$



$m = 0$

Propriétés

- Deux droites d'équations réduites $y = m_1x + p_1$ et $y = m_2x + p_2$ sont parallèles si et seulement si $m_1 = m_2$.
- Deux droites d'équations cartésiennes $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ sont parallèles si et seulement si $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$.

4. Résolution de systèmes de deux équations à deux inconnues

Propriété

Toute équation du premier degré à deux inconnues possède une infinité de solutions.

$$ax + by + c = 0. \tag{E}$$

L'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ vérifiant l'égalité (E) représente les solutions de cette équation. Graphiquement, cela donne une droite.

Exemple

L'équation cartésienne $x + y + 1 = 0$ admet une infinité de solutions.
$(-0,5; -0,5)$ est une solution de cette équation. En effet, $-0,5 - 0,5 + 1 = 0$.
$(-2; 1)$ est une solution de cette équation. En effet, $-2 + 1 + 1 = 0$.

Définition

Les systèmes de deux équations à deux inconnues sont définis comme suit :

$$\left\{\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array}\right.$$

où a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2 sont des constantes.
Le couple de nombres réels $(x; y)$ vérifiant les deux équations est appelé la solution de ce système.

Remarque

Résoudre un système revient à déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites dont les équations sont celles du système.

Exemple

Résolution du système $\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2x + 5y = 21 \\ 6x + 2y = -2 \end{array} \right.$.

L_1 et L_2 désignent les deux équations formant le système.

$\star$ Pour obtenir la valeur de x, il suffit d'éliminer y.
L'observation des coefficients des termes dépendant de y nous suggère l'utilisation de la combinaison $2L_1 - 5L_2$, celle-ci nous permettra de bien éliminer y. Ainsi,

$$\begin{array}{l} 2L_1 \ : \ 4x + 10y = 42 \\ \underline{-5L_2 \ : \ -30x - 10y = 10} \\ 2L_1 - 5L_2 \ : \ -26x = 52 \quad \text{On en déduit que } x = -2 \end{array} .$$

$\star$ Idem, pour obtenir la valeur de y, il suffit d'éliminer x. On observe que $3L_1 - L_2$, cette combinaison éliminera bien x. Ainsi,

$$\begin{array}{l} 3L_1 \ : \ 6x + 15y = 63 \\ \underline{-L_2 \ : \ -6x - 2y = 2} \\ 3L_1 - L_2 \ : \ 13y = 65. \quad \text{On en déduit alors que } y = 5. \end{array} .$$

• Rédaction sur une copie :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2x + 5y = 21 \\ 6x + 2y = -2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} 2L_1 - 5L_2 \\ 3L_1 - L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -26x = 52 \\ 13y = 65 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 5 \end{array} \right. .$$

$S = \{(-2; 5)\}$.