Calcul numérique

Seconde

https://maths-mde.fr

Conseils

Les notions qui suivent vous paraitront probablement élémentaires (ou pas), mais l'expérience prouve que certain(e)s d'entre vous ne sont pas très à l'aise avec les calculs, et avant de pouvoir aborder de nouveaux concepts, il est impératif de maitriser le calcul.

1. Les ensembles de nombres

a) $\mathbb{N}$

L'ensemble des **entiers naturels** est noté $\mathbb{N}$.
$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\ldots\}$.

b) $\mathbb{Z}$

L'ensemble des **entiers relatifs** est noté $\mathbb{Z}$.
$\mathbb{Z} = \{\cdots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \cdots\}$.

Remarque

Comme tous les éléments de $\mathbb{N}$ sont aussi dans $\mathbb{Z}$, on dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$ et on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

c) $\mathbb{D}$

L'ensemble des **nombres décimaux** est noté $\mathbb{D}$.
Tout nombre pouvant s'écrire sous la forme $\dfrac{m}{10^n}$ est appelé **nombre décimal**, avec m et n des nombres relatifs.

Remarque

Comme tous les éléments de $\mathbb{Z}$ sont aussi dans $\mathbb{D}$, on dit que $\mathbb{Z}$ est inclus dans $\mathbb{D}$, on note $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

1. Les ensembles de nombres

Exemple

$-3{,}1$ est un nombre décimal car il peut s'écrire sous la forme $\dfrac{-31}{10}$.

d) $\mathbb{Q}$

L'ensemble des **nombres rationnels** est noté $\mathbb{Q}$.
Tout nombre pouvant s'écrire sous la forme $\dfrac{p}{q}$ est appelé **nombre rationnel**, avec p et q des nombres relatifs et $q \neq 0$.

Remarque

Comme tous les nombres décimaux $\mathbb{D}$ sont aussi dans $\mathbb{Q}$, on dit que $\mathbb{D}$ est inclus dans $\mathbb{Q}$ et note $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Exemples

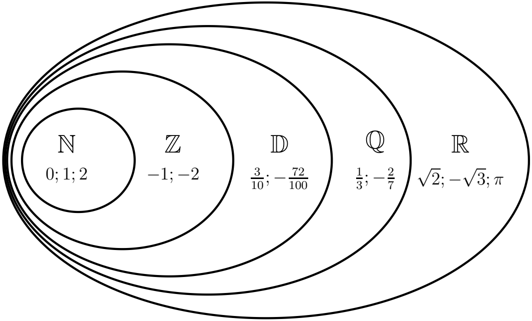
$\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{7}$ sont des nombres rationnels, ce ne sont pas des nombres décimaux.

e) $\mathbb{R}$

L'ensemble des **nombres réels** est noté $\mathbb{R}$.
$\sqrt{2}$ et π sont des nombres dits irrationnels car ils ne peuvent pas s'écrire sous la forme $\dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}/\{0\}$.

Remarque

Comme tous les nombres rationnels $\mathbb{Q}$ sont aussi dans $\mathbb{R}$, on dit que $\mathbb{Q}$ est inclus dans $\mathbb{R}$ et note $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



2. Quelques propriétés dans $\mathbb{N}$.

a) Diviseurs & Multiples

On dit que a divise b si on peut trouver un nombre k tel que $a \times k = b$. On note $a|b$.

On dit que b est un multiple de a si on peut trouver un nombre k tel que $b = a \times k$.

Exemple

3 divise 21 et 21 est un multiple de 3 car $3 \times 7 = 21$, on note $3|21$.

Propriété

Si $a|b$ et $a|c$ alors $a|b \pm c$.

Exemple

On sait que : $3|12$ et $3|9$ alors $3|12 + 9$ et $3|12 - 9$.

b) Entiers pairs et impairs

Soit n un nombre entier.

- n est pair si et seulement s'il existe un entier p tel que $n = 2p$.
- n est impair si et seulement s'il existe un entier p tel que $n = 2p + 1$.

Propriété

Si n est impair alors n^2 est impair.

c) Nombres premiers

Un entier naturel est premier s'il n'admet que deux diviseurs : 1 et lui-même.

Convention

1 n'est pas premier.

Il existe une infinité de nombres premiers.

Exemples

2, 3, 5, 7, 11 sont premiers.

c) Décomposition en produit de facteurs premiers

Un nombre entier supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers. Cette décomposition est unique.

Exemple : Décomposer 2 088 en produit de facteurs premiers.

$$\begin{array}{c|c} 2\,088 & 2 \\ 1\,044 & 2 \\ 522 & 2 \\ 261 & 3 \\ 87 & 3 \\ 29 & 29 \\ 1 & \end{array}$$

Donc : $2\,088 = 2^3 \times 3^2 \times 29$.

3. Quelques propriétés dans $\mathbb{R}$

a) Commutativité & Distributivité

- $a(bc) = (ab)c$
- $a(b+c) = ab + ac$

Exemples

$3(x-4) = 3x - 12$ $\quad$ $2(3x^2) = (2 \times 3)x^2 = 6x^2$.

b) Rappels : Règles de calculs des nombres rationnels

- $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{d} + \frac{c}{d} \times \frac{b}{b} = \frac{ad+bc}{bd}$
- $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Exemples

$\frac{8}{12} = \frac{2\times4}{3\times4} = \frac{2}{3}$; $\quad \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{1+4}{3} = \frac{5}{3}$; $\quad \frac{1}{2} + \frac{5}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{3} + \frac{5}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{3+10}{2\times3} = \frac{13}{6}$ $\quad \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{3\times5}{4\times2} = \frac{15}{8}$.

$\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$; $\quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$.

c) Règles des signes

- $-(-a) = a$
- $-(a+b) = -a-b$
- $-(a-b) = -a+b$
- $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$
- $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$

Exemples

$-(-2x) = 2x\,;$ $-(2+x) = -2-x\,;$ $-(3x-4) = -3x+4\,;$

$\frac{-x}{-3} = \frac{x}{3}.$

d) Racine carrée

Soit a un nombre réel positif. On appelle racine carrée de a (notée $\sqrt{a}$) le nombre positif dont le carré vaut a.

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

Exemple

$\sqrt{2}$ est le nombre positif dont le carré est égal à 2. On a donc $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2.$

Attention !

Un nombre réel négatif n'a pas de racine carrée.

Règles

Pour tous nombres réels positifs a et b :

- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$;
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ avec $b \neq 0$.

Exemples

- $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$.
- $\sqrt{\dfrac{25}{36}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \dfrac{5}{6}$.

Attention !

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Exemple

$\sqrt{16} + \sqrt{9} \neq \sqrt{25}$. En effet, $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ et $\sqrt{25} = 5$.

e) Étude du cas $\frac{1}{\sqrt{a}}$ avec $a \neq 0$.

Pour éliminer la racine du dénominateur d'une fraction de la forme $\frac{1}{\sqrt{a}}$, il suffit de multiplier en haut et en bas par $\sqrt{a}$.

Exemple

$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

f) Expressions conjuguées

Pour tous réels a et b strictement positifs, les expressions $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)$ et $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$ sont dites conjuguées l'une de l'autre et leur produit est égal à $a - b$.

Exemple

L'expression conjuguée de $\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$ est $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$ et l'expression conjuguée de $\left(3 - \sqrt{2}\right)$ est $\left(3 + \sqrt{2}\right)$.

$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$.

g) Puissance d'un nombre relatif

Soit n un nombre entier strictement positif.
Pour écrire $\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$, on note « a^n ». On lit «a puissance n ż ou ń a exposant n ».
Cas particuliers : $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.

Exemples

$3^2 = 3 \times 3 = 9$; $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$; $(-4)^2 = (-4) \times (-4) = 16$.

Propriétés

Soient a et b deux nombres relatifs et m et n deux entiers relatifs, on a :

- ⋆ $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- ⋆ $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- ⋆ $(a^n)^m = a^{n \times m}$
- ⋆ $a^n \times b^n = (ab)^n$
- ⋆ $\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$

Exemples

$\frac{5^7}{5^3} = 5^{7-3} = 5^4$; $\frac{x^5}{x^{-2}} = x^{5-(-2)} = x^7$; $(\frac{5}{4})^2 = \frac{5^2}{4^2} = \frac{25}{16}$.

h) Puissance d'exposant entier strictement négatif

Pour tout réel non nul a et pour tout entier strictement positif n, la puissance $(-n)^{\text{ième}}$ de a est le réel noté a^{-n} tel que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Exemples

- $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$
- $3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$.

i) Notation scientifique

Écrire un nombre en notation scientifique, c'est l'écrire sous la forme :

$$a \times 10^n$$

avec, $1 \leq a < 10$.

Exemples

$138\,000\,000 = 1,38 \times 10^8$;
$0,001\,7 = 1,7 \times 0,001 = 1,7 \times 10^{-3}$;
$0,428 = 4,28 \times 0,1 = 4,28 \times 10^{-1}$.