

Exercice 1 : 11,5 points)

1 $3x - 1 = 0 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

Le coefficient directeur de la fonction affine $x \rightarrow 3x - 1$ est positif donc le signe de $3x - 1$ est positif sur $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$ et négatif ailleurs.

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$3x - 1$	-	0	+

2 a $(3x - 2)(3 - 2x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 = 0$ ou $3 - 2x = 0 \Leftrightarrow 3x = 2$ ou $-2x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ ou $x = \frac{3}{2}$.

Ainsi, $S = \left\{\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right\}$.

Le coefficient directeur de la fonction affine $x \rightarrow 3x - 2$ est positif donc le signe de $3x - 2$ est positif sur $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$ et négatif ailleurs.

Le coefficient directeur de la fonction affine $x \rightarrow 3 - 2x$ est négatif donc le signe de $3 - 2x$ est négatif sur $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$ et positif ailleurs.

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$3x - 2$	-	0	+	+
$3 - 2x$	+	+	0	-
$(3x - 2)(3 - 2x)$	-	0	+	0

b $\left(\frac{2}{3} - x\right)\left(\frac{2}{3}x + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} - x = 0$ ou $\frac{2}{3}x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ ou $\frac{2}{3}x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ ou $x = -\frac{9}{2}$.

Ainsi, $S = \left\{-\frac{9}{2}; \frac{1}{2}\right\}$.

Le coefficient de x est positif donc le signe de $\frac{2}{3}x + 3$ est positif sur $\left[-\frac{9}{2}; +\infty\right[$ et négatif ailleurs.

Le coefficient de x est négatif donc le signe de $\frac{2}{3} - x$ est négatif sur $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$ et positif ailleurs.

x	$-\infty$	$-\frac{9}{2}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$\frac{2}{3} - x$	+	+	0	-
$\frac{2}{3}x + 3$	-	0	+	+
$\left(\frac{2}{3} - x\right)\left(\frac{2}{3}x + 3\right)$	-	0	+	0

3 On considère la fonction g définie par : $g(x) = \frac{2 - x}{4 - 3x}$.

a $\frac{4}{3}$ est une valeur interdite car $4 - 3x \neq 0$. Ainsi, $D_g = \left]-\infty; \frac{4}{3}\right[\cup \left]\frac{4}{3}; +\infty\right[$.

b Le coefficient de x est négatif donc le signe de $2 - x$ est négatif sur $[2; +\infty[$ et positif ailleurs.

Le coefficient de x est négatif donc le signe de $4 - 3x$ est négatif sur $\left[\frac{4}{3}; +\infty\right[$ et positif ailleurs.

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	2	$+\infty$	
$2 - x$		+	+	0	-
$4 - 3x$		+	0	-	-
$g(x)$		+	-	0	+

4 $]-\infty ; -2\sqrt{2}[\cup \left[0 ; \frac{\sqrt{2}}{4} \right]$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation $A(x) \geq 0$.

x	$-\infty$	$-2\sqrt{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$+\infty$	
$A(x)$		+	-	0	+	-

5 a $x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

Le coefficient de x est positif donc le signe de $x - 5$ est positif sur $[5 ; +\infty[$ et négatif ailleurs.

$$1 - 3x = 0 \Leftrightarrow 1 = 3x \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Le coefficient de x est négatif donc le signe de $1 - 3x$ est négatif sur $\left[\frac{1}{3} ; +\infty \right[$ et positif ailleurs.

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	5	$+\infty$		
$1 - 3x$		+	0	-	-	
$x - 5$		-	-	0	+	
$(1 - 3x)(x - 5)$		-	0	+	0	-

b $S = \left[\frac{1}{3} ; \frac{1}{5} \right]$ l'ensemble des solutions de l'inéquation $(1 - 3x)(x - 5) \geq 0$.

Exercice 2 : (8,5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-6; 7]$ par $f(x) = \frac{3x^2 + 4x}{x^2 + 1}$.

1 $-\frac{12}{13}$ est l'image de $-\frac{2}{3}$ par la fonction f . En effet,

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{2}{3}\right) &= \frac{3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \times \left(-\frac{2}{3}\right)}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{\frac{4}{3} - \frac{8}{3}}{\frac{4}{9} + 1} \\ &= \frac{-\frac{4}{3}}{\frac{13}{9}} \\ &= -\frac{12}{13}. \end{aligned}$$

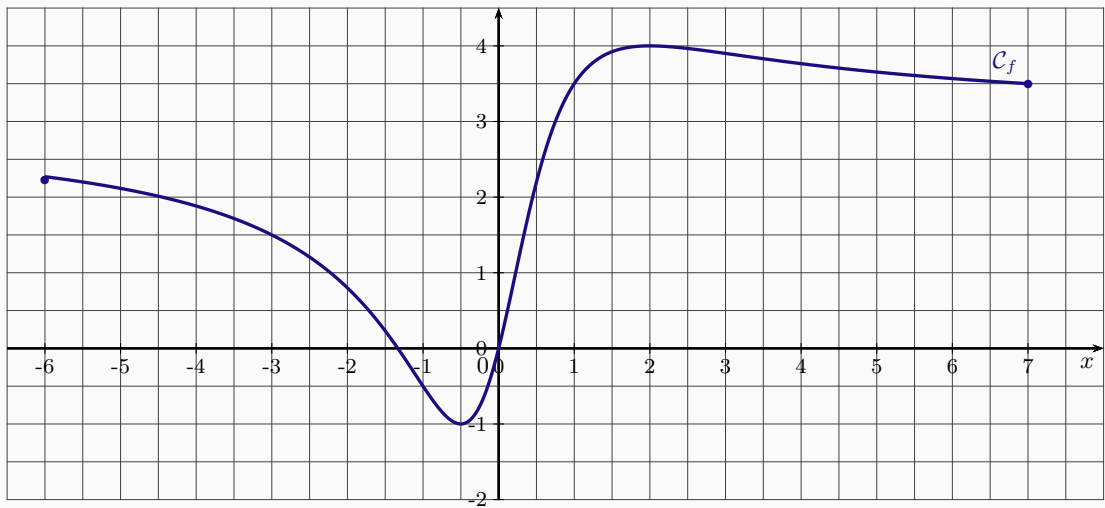
2 Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f revient à résoudre l'équation $f(x) = 0$. Par ailleurs,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2 + 4x}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(3x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{4}{3}.$$

Ainsi, 0 et $-\frac{4}{3}$ sont les deux antécédents de 0 par la fonction f .

3 $f(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{3x^2 + 4x}{x^2 + 1} = 3 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x = 3x^2 + 3 \Leftrightarrow 4x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$. Ainsi, $S = \left\{ \frac{3}{4} \right\}$.

4 La courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f est tracée ci-dessous.



À l'aide du graphique :

- (a) Tableau de variation de la fonction f .

x	-6	-1	2	7
$f(x)$	2.25	-1	4	3.5

- (b) Tableau de signe de la fonction f .

x	-6	$-\frac{4}{3}$	0	7	
$f(x)$	+	0	-	0	+

- (c) Avec la précision permise par la lecture graphique, -3 et $0,3$ sont les deux solutions de l'équation $f(x) = 1,5$.
- (d) $S = [-6 ; 1] \cup \{7\}$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq 3,5$.