Seconde | maths-mde.fr

Devoir Surveillé n° 8

...../28

Lycée Evariste Galois

Exercice 1 : (6 points)

1 La fonction f définie par l'expression $f(x) = -3x + 1$, est affine.
-3 est son coefficient dirceteur. -3 étant négatif, la fonction f est décroissante.
Ainsi, le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	

2 -1 est une valeur interdire car $(x+1)^2 \neq 0$ et donc $x + 1 \neq 0$. Ainsi,
$D_g = \mathbb{R} \subset \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.
Déterminer les antécédents de 1 par g revient à résoudre l'équation $g(x) = 1$.
Pour tout $x \in D_g$,

$$\begin{aligned}
\frac{3}{(x+1)^2} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 = 3 \\
&\Leftrightarrow \quad x + 1 = \sqrt{3} \text{ ou } x + 1 = -\sqrt{3} \\
&\Leftrightarrow \quad x = \sqrt{3} - 1 \text{ ou } x + 1 = -\sqrt{3} - 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\sqrt{3} - 1$ et $-\sqrt{3} - 1$ sont les deux antécédents de 1 par g.

3 Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|-x-1| = \sqrt{2} \quad &\Leftrightarrow \quad -x - 1 = \sqrt{2} \text{ ou } -x-1 = -\sqrt{2} \\
&\Leftrightarrow \quad x = -\sqrt{2} - 1 \text{ ou } x = \sqrt{2} - 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, $S = \left\{-\sqrt{2} - 1;\ \sqrt{2} - 1\right\}$

4 Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|-3x-1| \geqslant 3 \quad &\Leftrightarrow \quad -3x - 1 \geqslant 3 \text{ ou } -(-3x-1) \geqslant 3 \\
&\Leftrightarrow \quad -3x - 1 \geqslant 3 \text{ ou } 3x + 1 \geqslant 3 \\
&\Leftrightarrow \quad -3x \geqslant 4 \text{ ou } 3x \geqslant 2 \\
&\Leftrightarrow \quad x \leqslant \frac{4}{-3} \text{ ou } x \geqslant \frac{2}{3} \\
&\Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty;\ \frac{4}{-3}\right] \text{ ou } x \in \left[\frac{2}{3};\ +\infty\right[.
\end{aligned}$$

Ainsi, $S = \left]-\infty;\ \frac{4}{-3}\right] \cup \left[\frac{2}{3};\ +\infty\right[$.

5 $\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} 2x - 5y = -8 \\ x + 7y = 15 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{matrix} 7L_1 + 5L_2 \\ L_1 - 2L_2 \end{matrix} \begin{cases} 19x = 19 \\ -19y = -38 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$.

Ainsi, $S = \{(1; 2)\}$.

Exercice 2 : (3 points)

1 Dans le plan muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on considère (d) la droite d'équation $-\sqrt{2}x+4y+1=0$ et (d') la droite d'équation $4x-8\sqrt{2}y+3=0$.

a $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

$\vec{u}'\begin{pmatrix} 8\sqrt{2} \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d').

b $\det(\vec{u},\vec{u}') = \begin{vmatrix} -4 & 8\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 4 \end{vmatrix} = -16+16 = 0$. Les vecteurs directeurs sont colinéaires, donc les droites sont parallèles.

2 Calculons le coefficient directeur m :

$m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-1-(-3)}{7-(-1)} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$.

Calculons p :

$A \in (d) \Rightarrow y_A = \dfrac{1}{4}x_A + p \Leftrightarrow -3 = \dfrac{1}{4}\times(-1)+p \Leftrightarrow p = -\dfrac{11}{4}$.

Ainsi, l'équation réduite de (d) est donnée par : $y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{11}{4}$.

Exercice 3 : (8 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4.$$

1 Selon la représentation graphique, -2 ; 1 et 2 sont les solutions de l'équation $f(x)=0$.

2 Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(x-2)(x-1)(x+2) &= (x^2-2^2)(x-1)\\ &= (x^2-4)(x-1)\\ &= x^3-x^2-4x+4\\ &= f(x).\end{aligned}$$

3 D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} & f(x)=0\\ \Leftrightarrow\ & (x-2)(x-1)(x+2)=0\\ \Leftrightarrow\ & x-2=0 \text{ ou } x-1=0 \text{ ou } x+2=0\\ \Leftrightarrow\ & x=2 \text{ ou } x=1 \text{ ou } x=-1.\end{aligned}$$

Ainsi, $S=\{-2;1;2\}$.

4 Selon la représentation graphique, $f(-1)=6$ donc le point $A(-1;6)$ appartient à la courbe de la fonction f.

5 Tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Tableau de variations :

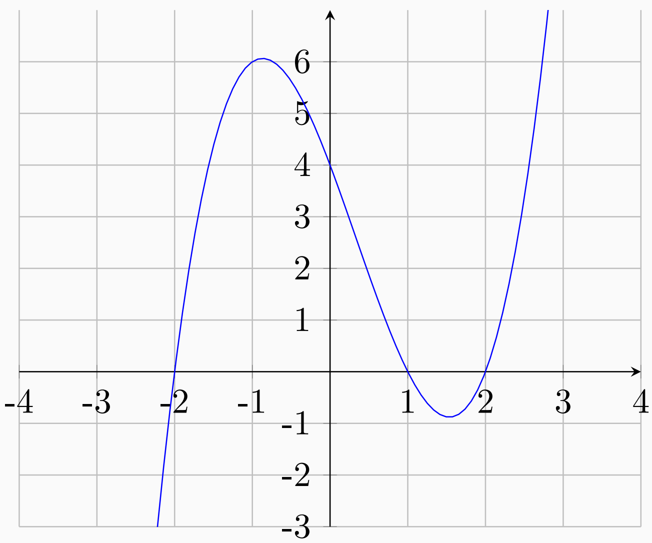
x	$-\infty$		≈ -0.9		≈ 1.5		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	≈ 6.1	$\searrow$	≈ -0.8	$\nearrow$	

6 Selon le graphique :

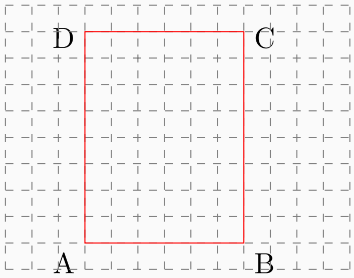
a -0.8 a deux antécédents par f.

b -2 a un seul antécédent par f.

c 3 a trois antécédents par f.



Exercice 4 : (3 points)



Soit $ABCD$ un rectangle, I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[AD]$, M le point tel que $\overrightarrow{JM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et N le point tel que $\overrightarrow{IN} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

On se place dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

1 $I\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$; $J\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $M\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $N\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

2 $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 0$

Donc A , M et N sont bien alignés.

$\det(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{BN}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

Les droites (DM) et (BN) sont bien parallèles.