

Exercice 1 : (6 points)

Les six questions sont indépendantes.

- 1** La fonction cube est croissante sur \mathbb{R} . Ainsi, $-4 < 2$ implique que $f(-4) < f(2)$.
2 La fonction p est la fonction inverse. En effet,

$$\begin{aligned} p(x) &= 3 - \frac{3x-1}{x} \\ &= \frac{3x}{x} - \frac{3x-1}{x} \\ &= \frac{3x - 3x + 1}{x} \\ &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

- 3** Si $-1 \leq x \leq 5$, alors $-2 \times 5 \leq -2x \leq -1 \times (-2)$, soit $-10 \leq -3x \leq 2$.
 Par conséquent, $-9 \leq -2x + 1 \leq 3$.
4 Pour tout x dans \mathbb{R}_+^* :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} &\Leftrightarrow 2 = 2\sqrt{x^2} \\ &\Leftrightarrow 2 = 2x \\ &\Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $S = \{1\}$.

- 5** Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \sqrt{3}x - 2 \leq \sqrt{5}x + 1 &\Leftrightarrow \sqrt{3}x - \sqrt{5}x \leq 1 + 2 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{5})x \leq 3 \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{3}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} \text{ car, } \sqrt{5} - \sqrt{3} < 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{3(\sqrt{3} + \sqrt{5})}{(\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5})} \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{3(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{\sqrt{3^2} - \sqrt{5^2}} \text{ car, } (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{-3(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2}. \end{aligned}$$

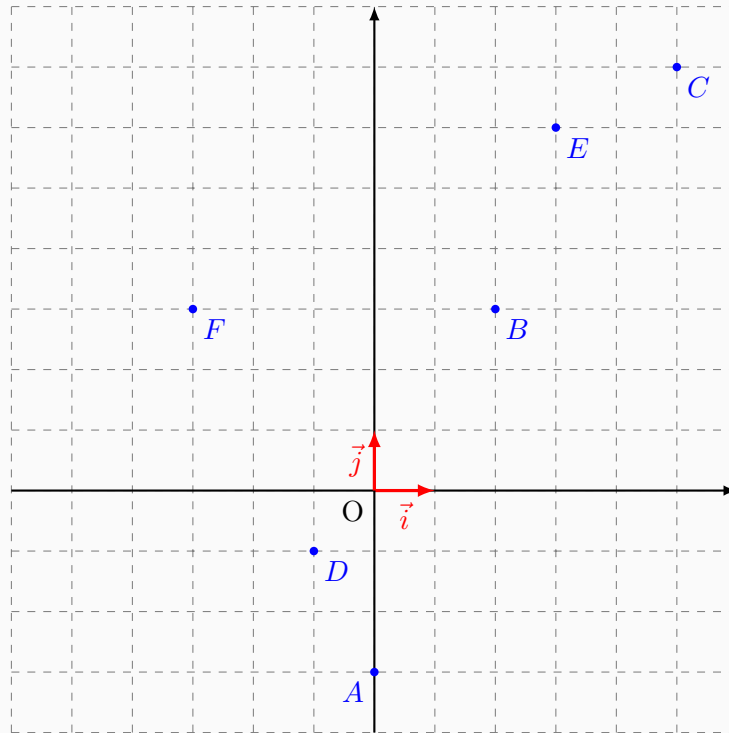
Ainsi, $S = \left[\frac{-3(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2}; +\infty \right[$.

- 6** On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (x+3)^2$. Soit $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= (b+3)^2 - (a+3)^2 \\ &= [(b+3) - (a+3)][b+3+a+3] \\ &= [b+3-a-3][b+3+a+3] \\ &= (b-a)(b+a+6). \end{aligned}$$

Exercice 2 : (4 points)

- 1 Dans le repère orthonormé ci-dessous, placer les points $A \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $D \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.



- 2 Soit $\begin{pmatrix} x_E \\ y_E \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_F \\ y_F \end{pmatrix}$ respectivement les coordonnées des points E et F .

$$\overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} x_E - 2 \\ y_E - 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E - 2 = 1 \\ y_E - 3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 3 \\ y_E = 6 \end{cases}.$$

$$\overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} x_F \\ y_F + 3 \end{pmatrix} = 3 \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = -3 \\ y_F + 3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = -3 \\ y_F = 3 \end{cases}.$$

- 3 On a : $\overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} x_E - x_C \\ y_E - y_C \end{pmatrix} = \overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} 3 - 5 \\ 6 - 7 \end{pmatrix} = \overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\text{et } \overrightarrow{CF} \begin{pmatrix} x_F - x_C \\ y_F - y_C \end{pmatrix} = \overrightarrow{CF} \begin{pmatrix} -3 - 5 \\ 3 - 7 \end{pmatrix} = \overrightarrow{CF} \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{De plus, } \det(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CF}) = \begin{vmatrix} -2 & -8 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -2 \times (-4) - (-1) \times (-8) = 0.$$

Ainsi, les points C , E et F sont alignés.

- 4 La distance AB est donnée par l'expression :

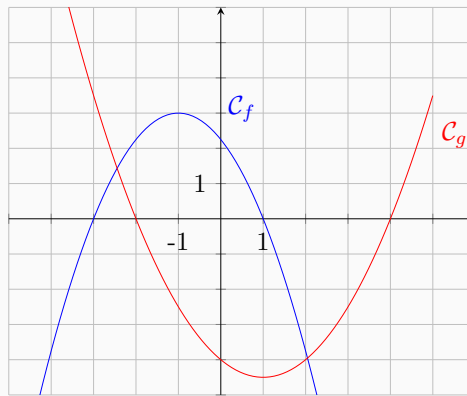
$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(2 - 0)^2 + (3 - (-3))^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{40} \\ &= 2\sqrt{10}. \end{aligned}$$

- 5 Les coordonnées de I le milieu de $[AC]$.

$$I \left(\frac{x_A + x_C}{2} ; \frac{y_A + y_C}{2} \right) \Leftrightarrow I \left(\frac{0 + 5}{2} ; \frac{-3 + 7}{2} \right) \Leftrightarrow I \left(\frac{5}{2} ; 2 \right).$$

Exercice 3 : (8 points)

On considère les deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R} et représentées par les deux courbes ci-dessous.



- 1 -3 et 1 sont les deux solutions de l'équation : $f(x) = 0$.
 -2 et 4 sont les deux solutions de l'équation $g(x) = 0$.
- 2 $] -\infty; -3] \cup [1; +\infty[$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq 0$.
- 3 $] -\infty; -1] \cup [4; +\infty[$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) \geq 0$.
- 4 Tableau de variation de f .

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f	3 		

Tableau de variation de g .

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g	-4.5 		

- 5 Tableau de signe de f .

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

- 6 Tableau de signe de g .

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$	
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

- 7 Avec la précision permise par la représentation graphique : $-2,5$ et 2 sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.
- 8 Avec la précision permise par la représentation graphique : $] -\infty; -2,5[\cup] 2; +\infty[$ sont les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$.

Exercice 4 : (2 points)

On considère une fonction f dont le tableau de variations est le suivant.

x	-10	$-\frac{7}{2}$	1	2	$\frac{17}{3}$	8
$f(x)$	-2	-5	0	-3	0	4

1 La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[1 ; 2]$.

De plus, $-1 < 0 < \frac{2}{3} < 1$. Donc, $f(0) > f\left(\frac{2}{3}\right)$.

2 D'une part, $-1 \in \left[-\frac{7}{2} ; 1\right]$ et f est croissante $\left[-\frac{7}{2} ; 1\right]$.

D'autre part, $\frac{3}{2} \in [1 ; 2]$ et f est décroissante sur $[1 ; 2]$.

On ne peut donc pas comparer $f(-1)$ et $f\left(\frac{3}{2}\right)$, car le sens de variation est différent sur les deux intervalles $\left[-\frac{7}{2} ; 1\right]$ et $[1 ; 2]$.

3 $S =]-10 ; 1[\cup]1 ; \frac{17}{3}[$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$.