Seconde | **Devoir Surveillé n° 7** | Lycée
maths-mde.fr | **Corrigé** | Evariste Galois

Exercice 1 : (7 points)

Les sept questions sont indépendantes.

1 La fonction inverse f est croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Or, $4 < 12$, ainsi, $f(12) > f(4)$.

2 La fonction p est la fonction inverse. En effet,
$p(x) = \dfrac{x+1}{x} - 1 = \dfrac{x+1}{x} - \dfrac{x}{x} = \dfrac{x+1-x}{x} = \dfrac{1}{x}$.

3 Si $-2 \leqslant x \leqslant 3$, alors $-2 \times 3 \leqslant -2x \leqslant -2 \times (-2)$, soit $-6 \leqslant -2x \leqslant 4$.
Par conséquent, $1 \leqslant -2x + 7 \leqslant 11$.

4 Pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$:
$\dfrac{1}{\sqrt{x}} = 2 \Leftrightarrow 1 = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x}^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$.
Ainsi, $S = \left\{\dfrac{1}{4}\right\}$.

5 Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{5}x - 3 \leqslant \sqrt{2}x + 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{5}x - \sqrt{2}x \leqslant 1 + 3 \\
&\Leftrightarrow \quad (\sqrt{5} - \sqrt{2})x \leqslant 4 \\
&\Leftrightarrow \quad x \leqslant \frac{4}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \quad \text{car, } \sqrt{5} - \sqrt{2} > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x \leqslant \frac{4(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})} \\
&\Leftrightarrow \quad x \leqslant \frac{4(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{\sqrt{5}^2 - \sqrt{2}^2} \quad \text{car, } (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x \leqslant \frac{4(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{3}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $S = \left]-\infty; \dfrac{4(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{3}\right]$.

6 Soient a et b deux réels positifs. En appliquant la première identité remarquable, on obtient :

$$\begin{aligned}
(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - \sqrt{a+b}^2 &= \sqrt{a}^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2 - (a+b) \\
&= a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b - a - b \\
&= 2\sqrt{a}\sqrt{b}.
\end{aligned}$$

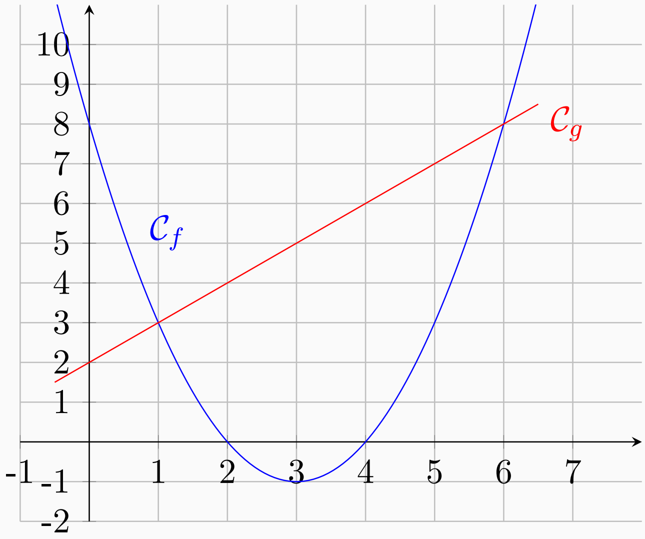
Or, $2\sqrt{a}\sqrt{b} > 0$. Donc, $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - \sqrt{a+b}^2 \geq 0$.
Par conséquent, $\sqrt{a+b}^2 \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$.

7 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-2)^2$. Soit $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f(b) - f(a) &= (b-2)^2 - (a-2)^2 \\
&= [(b-2) - (a-2)][b - 2 + a - 2] \\
&= [b - 2 - a + 2][b - 2 + a - 2] \\
&= (b-a)(b+a-4).
\end{aligned}$$

Exercice 2 : (11 points)

On donne les représentations graphiques de deux fonctions f et g.



1 Voici les domaines de définitions des deux fonctions : $D_f = [-0{,}5; 6{,}5]$ et $D_g = [-0{,}5; 6{,}5]$.

2 $f(0) = 8$, $f(5) = 3$ et $g(3) = 5$.

3 1 et 5 sont les deux solutions de cette équation $f(x) = 3$.

4 $f(x) \geqslant 8$ sur l'ensemble $[-0{,}5; 0] \cup [6; 6{,}5]$.

5 1 et 6 sont les deux solutions de cette équation $f(x) = g(x)$. Ce sont les abscisses des deux points d'intersections de $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$.

6 $f(x) > g(x)$ sur l'ensemble $]-0{,}5; 2[\cup]6; 6{,}5[$.

7 2 et 5 sont les deux solutions de l'équation $g(x) - f(x) = 4$.

8 -1 est le minimum de f, il est atteint quand $x = 3$.

9 Tableau de signes.

x	-0.5		3		6.5
$f(x)$	11	↘	-1	↗	11

Tableau de variations.

x	-0.5		2		4		6.5
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 3 : (4 points)

f est une fonction paire définie sur $[-8\,;\,8]$. Elle est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

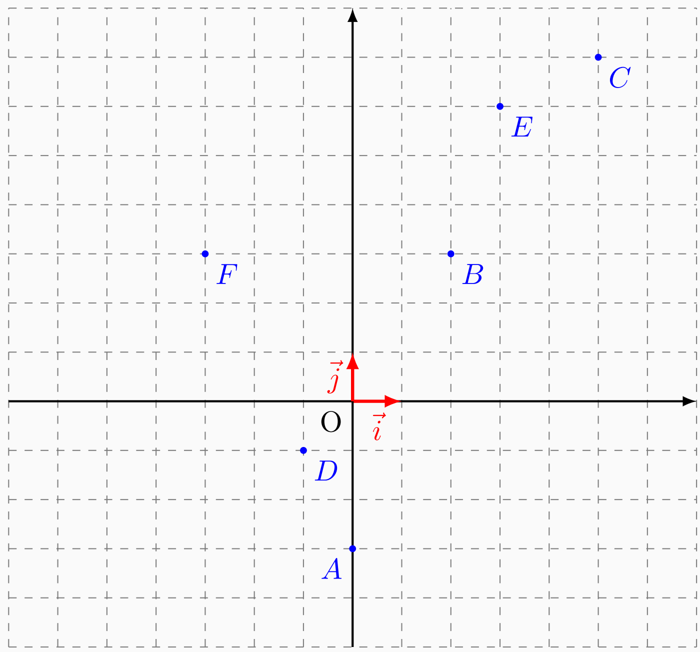
x	-8		-2		0		2		8
$f(x)$	-5	↗	1	↘	-2	↗	1	↘	-5

g est une fonction impaire définie sur $[-6\,;\,6]$. Elle est donc symétrique par rapport à l'origine.

x	-6		-3		0		3		6
$g(x)$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

Exercice 4 : (6 points)

1 Dans le repère orthonormé ci-dessous, placer les points $A\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$.



$$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}x_E-2\\y_E-3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\times 2\\\frac{1}{2}\times 6\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_E-2=1\\y_E-3=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_E=3\\y_E=6\end{cases}.$$

$$\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}x_F\\y_F+3\end{pmatrix}=3\,\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}3\times(-1)\\3\times 2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_F=-3\\y_F+3=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_F=-3\\y_F=3\end{cases}.$$

2 $\det(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CF})=\begin{vmatrix}-2&-8\\-1&-4\end{vmatrix}=-2\times(-4)-(-1)\times(-8)=0.$

Ainsi, les points C, E et F sont alignés.

3 $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

$AB=\sqrt{(2-0)^2+(3-(-3))^2}=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}.$

$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}$

$AC=\sqrt{(5-0)^2+(7-(-3))^2}=\sqrt{5^2+10^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}.$

$BD=\sqrt{(x_D-x_B)^2+(y_D-y_B)^2}$

$BD=\sqrt{(-1-2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5.$