

Exercice 1 : (8 points)

Les sept questions sont indépendantes.

- 1 On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Il n'y a pas de valeurs interdites car pour tout réel x , $x^2 + 1 \geq 1 > 0$. Ainsi, le domaine de définition est :

$$D_f = \mathbb{R} =] - \infty ; +\infty[.$$

Par ailleurs, $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, car pour tout $x \in D_f$, $-x \in D_f$.

De plus, $f(-x) = \frac{2 \times (-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{-2x}{x^2 + 1} = -f(x)$. Par conséquent, la fonction f est impaire.

- 2 On considère la fonction g définie par : $g(x) = (2x - 1)^2 + (2x + 1)^2$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut calculer une image par la fonction g . Ainsi, le domaine de définition de g est donné par : $D_g = \mathbb{R} =] - \infty ; +\infty[.$

Par ailleurs, $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$.

De plus, pour tout réel x , on a :

$$g(-x) = (-2x - 1)^2 + (-2x + 1)^2 = [-(2x + 1)]^2 + [-(2x - 1)]^2 = (2x + 1)^2 + (2x - 1)^2 = g(x).$$

En conséquence, la fonction g est paire.

- 3 Si $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, alors $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Et donc, $2 \times 0 + 1 \leq 2x + 1 \leq 2 \times \frac{1}{2} + 1$.

Soit, $1 \leq 2x + 1 \leq 2$. Ce qui implique que $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2x + 1} \leq 1$.

Par conséquent, $-2 \leq \frac{-2}{2x + 1} \leq -1$. Autrement dit, $\frac{-2}{2x + 1} \in [-2; -1]$.

- 4 1 est une valeurs interdite, car $x + 1 \neq 0$. Sous cette conditions,

$$\begin{aligned} \frac{2}{x - 1} = x + 1 &\Leftrightarrow 2 = (x + 1)(x - 1) \\ &\Leftrightarrow 2 = x^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, $S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.

- 5 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $2x - 1 \geq 2(5x + 1)$.

$$\begin{aligned} 2x - 1 \geq 10x + 2 &\Leftrightarrow 2x - 10x \geq 2 + 1 \\ &\Leftrightarrow -8x \geq 3 \\ &\Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Ainsi, $S = \left] -\infty ; -\frac{3}{8} \right]$.

- 6 $I \cap J = [-1; 5] \cap] - \infty ; -1] = \{-1\}$ et $I \cup J = [-1; 5] \cup] - \infty ; -1] =] - \infty ; 5]$.

- 7 Soient $[AC]$ et $[BD]$ deux diamètres d'un cercle $\mathcal{C}$. Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme, car ses deux diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu O , le centre du cercle $\mathcal{C}$.

Par conséquent, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Exercice 2 : (7 points)

On considère la fonction h définie par :

$$h(x) = 1 + \frac{1}{x-1}.$$

1 1 est une valeur interdite, car $x - 1 \neq 0$. Ainsi, l'ensemble de définition de la fonction h est donné par : $D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

2 Pour tout $x \in D_h$, $h(x) = 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{1(x-1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1)+1}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$.

3 -2 est l'image de $\frac{2}{3}$ par la fonction h . En effet, $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-1} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{-1} = -2$.

4 0 est l'image de 0 par la fonction h . En effet, $f(0) = \frac{0}{0-1} = 0$.

5 $2 + \sqrt{2}$ est l'image de $\sqrt{2}$ par la fonction h . En effet,

$$f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}^2 - 1^2} = 2 + \sqrt{2}.$$

6 Déterminer les antécédents de 1 par la fonction h , revient à résoudre l'équation $h(x) = 1$.
Pour tout $x \in D_h$,

$$\begin{aligned} h(x) = 1 &\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x-1} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = 0. \end{aligned}$$

Ceci veut dire que $1 = 0$. C'est absurde. En conséquence 1 n'admet pas d'antécédent par la fonction h .

7 Déterminer les antécédents de 0 par la fonction h , revient à résoudre l'équation $h(x) = 0$.
Pour tout $x \in D_h$,

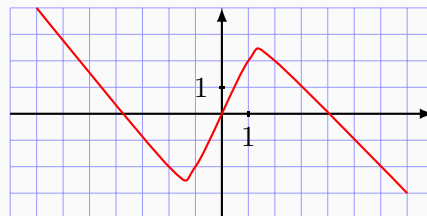
$$\begin{aligned} h(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x}{x-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, 0 est l'antécédent de 0 par la fonction h .

Exercice 3 : (2 points)

Ci-après le tableau de variation relatif à la courbe représentative de la fonction donnée.

x	-7	-1.5	1.5	7
$f(x)$	4		2.5	-3
		-2.5		

**Exercice 4 : (3 points)**

On considère un triangle ABC. I est le milieu de [AB] et J celui de [AC].

1 En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

En conséquence, les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont bel et bien colinéaires.

2 Les vecteurs deux $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires donc les deux droites (IJ) et (BC) sont parallèles.