Seconde | **Devoir Surveillé n° 6** | Lycée

maths-mde.fr | **Corrigé** | Evariste Galois

Exercice 1 : (8 points)

Les sept questions sont indépendantes.

1 On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$. Ainsi, $x^2+1 \geqslant 1$. Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 \neq 0$.
On déduit alors que le domaine de définition : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$.

Or, $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$.

Par ailleurs, $f(-x) = \dfrac{2\times(-x)}{(-x)^2+1} = \dfrac{-2x}{x^2+1} = -f(x)$. Donc, la fonction f est impaire.

2 On considère la fonction g définie par : $g(x) = (x-1)^2 + (x+1)^2$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut calculer une image par la fonction g. Ainsi, le domaine de définition de g est donné par : $D_g = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$.

Or, $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$.

Par ailleurs, $g(-x) = (-x-1)^2 + (-x+1)^2 = [-(x+1)]^2 + [-(x-1)]^2 = (x+1)^2 + (x-1)^2 = g(x)$.
Donc, la fonction g est paire.

3 Si $x \in \left[0;\dfrac{1}{3}\right]$, alors $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{3}$. Et donc, $3\times 0 + 1 \leqslant 3x+1 \leqslant 3 \times \dfrac{1}{3} + 1$.

Soit, $1 \leqslant 3x+1 \leqslant 2$. Ce qui implique que $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{3x+1} \leqslant 1$.

Par conséquent, $1 \leqslant \dfrac{2}{3x+1} \leqslant 2$. Autrement dit, $\dfrac{2}{3x+1} \in [1;2]$.

4 -1 et 1 sont les deux valeurs interdites, car $x-1 \neq 0$ et $x+1 \neq 0$. Sous ces deux conditions,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x-1} = \frac{3}{x+1} &\Leftrightarrow 2(x+1) = 3(x-1)\\
&\Leftrightarrow 2x+2 = 3x-3\\
&\Leftrightarrow 2+3 = 3x-2x\\
&\Leftrightarrow 4 = x.
\end{aligned}$$

Ainsi, $S = \{5\}$.

5 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $3(2x-1) \geqslant 5x+1$.

$$\begin{aligned}
3(2x-1) \geqslant 5x+1 &\Leftrightarrow 6x-3 \geqslant 5x+1\\
&\Leftrightarrow 6x-5x \geqslant 1+3\\
&\Leftrightarrow x \geqslant 4.
\end{aligned}$$

Ainsi, $S = [4;+\infty[$.

6 $I \cap J = [-2;1] \cap]-\infty;3] = [-2;1]$ et $I \cup J = [-2;1] \cup]-\infty;3] =]-\infty;3]$.

7 Soient $[AC]$ et $[BD]$ deux diamètres d'un cercle $\mathscr{C}$. Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme, car ses deux diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu O, le centre du cercle $\mathscr{C}$.

Par conséquent, selon la règle du parallélogramme $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Sinon, on peut raisonner autrement : $ABCD$ est un parallélogramme ce qui entraîne que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
Ainsi, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$.

Et en utilisant la relation de Chasles, on obtient : $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Exercice 2 : (7 points)

On considère la fonction h définie par :

$$h(x) = 2 + \frac{3}{x-1}.$$

1 1 est une valeur interdite, car $x - 1 \neq 0$. Ainsi, l'ensemble de définition de la fonction h est donné par : $D_h = \mathbb{R} - 1 =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

2 Pour tout $x \in D_h$, $h(x) = 2 + \frac{3}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{3}{x-1} = \frac{2(x-1)+3}{x-1} = \frac{2x-2+3}{x-1} = \frac{2x+1}{x-1}$.

3 0 est l'image de $-\frac{1}{2}$ par la fonction h. En effet,

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \times \frac{-1}{2} + 1}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{-1+1}{-\frac{1}{2} - 1} = 0.$$

4 -1 est l'image de 0 par la fonction h. En effet,

$$f(0) = \frac{2 \times 0 + 1}{0 - 1} = -1.$$

5 $5 + 3\sqrt{2}$ est l'image de $\sqrt{2}$ par la fonction h. En effet,

$$f(\sqrt{2}) = \frac{2 \times \sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{(2\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{2\sqrt{2}^2 + 3\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}^2 - 1^2} = 5 + 3\sqrt{2}.$$

6 Déterminer les antécédents de 1 par la fonction h, revient à résoudre l'équation $h(x) = 1$.
Pour tout $x \in D_h$,

$$\begin{aligned} h(x) = 1 &\Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-1} = 1 \\ &\Leftrightarrow 2x + 1 = x - 1 \\ &\Leftrightarrow 2x - x = -1 - 1 \\ &\Leftrightarrow x = -2. \end{aligned}$$

Ainsi, -2 est l'antécédent de 1 par la fonction h.

7 Déterminer les antécédents de 2 par la fonction h, revient à résoudre l'équation $h(x) = 2$.
Pour tout $x \in D_h$,

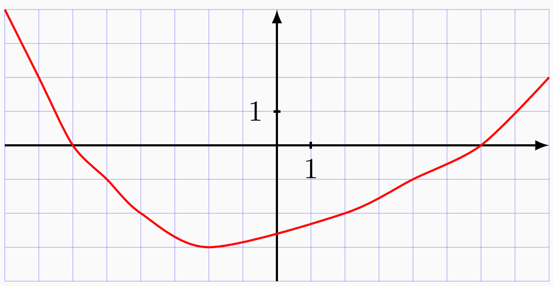
$$\begin{aligned} h(x) = 2 &\Leftrightarrow 2 + \frac{3}{x-1} = 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{x-1} = 0. \end{aligned}$$

C'est absurde ! Ainsi, 2 n'admet pas d'antécédent par la fonction h.

Exercice 3 : (2 points)

Ci-après le tableau de variations correspondant à la représentation graphique ci-dessous.

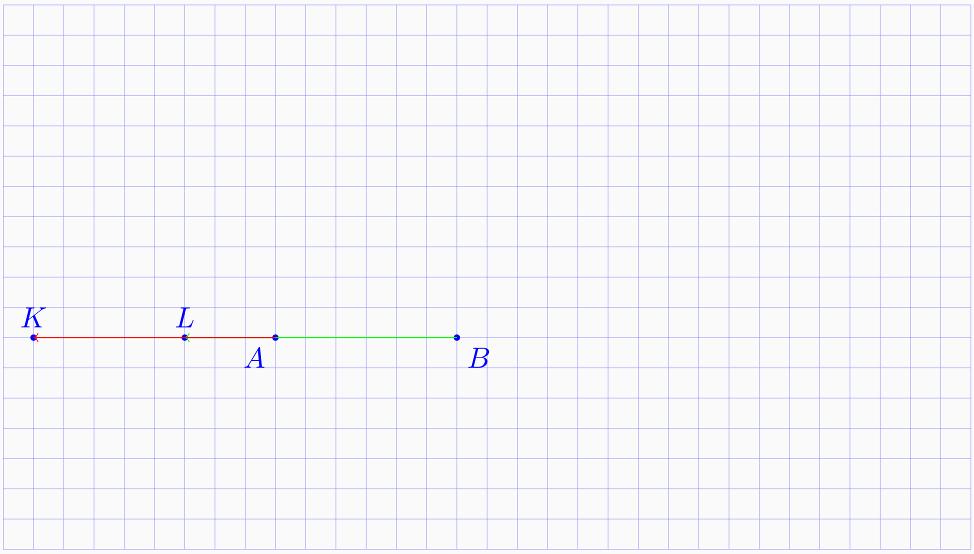
x	-8		-2		8
$f(x)$	4	↘	-3	↗	2



Exercice 4 : (3 points)

Soient A et B deux points du plan distants de 6 cm.

1 **a** Le point L est tel que $\overrightarrow{BL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$. Voir la figure.



b Le point K est tel que $\overrightarrow{AK} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$. Voir la figure.

2 **a** En utilisant la relation de Chasles, on obtient : $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}$.

Or, $\overrightarrow{KA} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$. Ainsi,

$\overrightarrow{LK} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BA} = \left(-\frac{9}{6} + \frac{6}{6} + \frac{8}{6}\right)\overrightarrow{BA} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BA}$.

b On sait que la norme du vecteur $\overrightarrow{BA}$ est égale à 6.

Ainsi, la norme du vecteur $\overrightarrow{LK}$ est égale à 5 cm. En effet, $6 \times \frac{5}{6} = 5$.