Seconde | **Devoir Surveillé n° 5** | Lycée
maths-mde.fr | **Corrigés** | Evariste Galois

Exercice 1 : (7 points)

Les six questions sont indépendantes.

1 En appliquant la première identité remarquable, on obtient :

$$x^2 + 2\sqrt{5}x + 5 = \left(x + \sqrt{5}\right)^2.$$

2 En appliquant la deuxième identité remarquable sur le premier terme et la première identité remarquable sur le second terme, on obtient :

$$\begin{aligned}(x-\sqrt{7})^2 - (x+\sqrt{7})^2 &= x^2 - 2\sqrt{7}x + \sqrt{7}^2 - \left(x^2 + 2\sqrt{7}x + \sqrt{7}^2\right)\\ &= x^2 - 2\sqrt{7}x + \sqrt{7}^2 - x^2 - 2\sqrt{7}x - \sqrt{7}^2\\ &= -4\sqrt{7}x.\end{aligned}$$

3 Si $x \in [0;2]$, alors

$$\begin{aligned}0 \leqslant x \leqslant 2 &\Leftrightarrow -2 \leqslant -x \leqslant 0\\ &\Leftrightarrow -6 \leqslant -3x \leqslant 0\\ &\Leftrightarrow -5 \leqslant -3x+1 \leqslant 1\\ &\Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leqslant \frac{-3x+1}{2} \leqslant \frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right].\end{aligned}$$

4 -2 et 1 sont les deux valeurs interdites, car $x-1 \neq 0$ et $x+2 \neq 0$. Sous ces conditions :

$$\begin{aligned}\frac{3}{x-1} = \frac{-1}{x+2} &\Leftrightarrow 3(x+2) = -1(x-1)\\ &\Leftrightarrow 3x+6 = -x+1\\ &\Leftrightarrow 3x+x = 1-6\\ &\Leftrightarrow 4x = -5\\ &\Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}.\end{aligned}$$

Ainsi, $S = \left\{-\frac{5}{4}\right\}$.

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $4x - 1 \leqslant 5(x-1)$.

$$\begin{aligned}4x-1 \leqslant 5(x-1) &\Leftrightarrow 4x-1 \leqslant 5x-5\\ &\Leftrightarrow 4x-5x \leqslant -5+1\\ &\Leftrightarrow -x \leqslant -4\\ &\Leftrightarrow x \geqslant 4.\end{aligned}$$

Ainsi, $S = [4;+\infty[$.

6 Soit un parallélogramme $ABCD$. Ainsi,

- **a** $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$;
- **b** $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$;
- **c** $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$;
- **d** $-\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$.

Exercice 2 : (2 points)

1 $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[\bigcap\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[=\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\right[$.

2 $\left[-\dfrac{7}{2};+\infty\right[\bigcap\left]-10;\dfrac{1}{3}\right]=\left[-\dfrac{7}{2};\dfrac{1}{3};\right]$.

3 $]-5;10]\bigcup]-13;6]=]-13;10]$.

4 $[-2;0]\bigcup[-4;+\infty[=[-4;+\infty[$.

Exercice 3 : (3 points)

Les deux questions sont indépendantes.

1 Pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} &= \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}) \\ &= \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x+1-x},\ \text{car, } \sqrt{x+1}^2-\sqrt{x}^2=x+1-x \\ &= \sqrt{x+1}+\sqrt{x}.\end{aligned}$$

2 On considère deux nombres réels positifs x et y. Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy} &= \frac{x+y}{2}-\frac{2\sqrt{x}\sqrt{y}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{x}^2-2\sqrt{x}\sqrt{y}+\sqrt{y}^2}{2} \\ &= \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{2}.\end{aligned}$$

Or, pour tout $x\geqslant 0$ et $y\geqslant 0$, $\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{2}\geqslant 0$. Donc, $\dfrac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$.

Exercice 4 : (4 points)

Voici les tarifs annuels de l'eau dans deux communes :

- La commune A facture un abonnement annuel de 32 € puis 1,13 € le m^3 d'eau consommé.
- La commune B facture un abonnement annuel de 14 € puis 1,72 € le m^3 d'eau consommé.

On note x le nombre de m^3 d'eau consommé.

1 Le tarif d'eau dans la commune A est donné par l'expression : $1{,}13x+32$.

2 Le tarif d'eau dans la commune A est donné par l'expression : $1{,}72x+14$.

3 Dire que le tarif de la commune A est plus avantageux que le tarif de la commune B, revient à dire $1{,}13x+32<1{,}72x+14$. Résolvons donc cette inéquation.

$$\begin{aligned}1{,}13x+32<1{,}72x+14 &\Leftrightarrow 32-14<1{,}72x-1{,}13x \\ &\Leftrightarrow 18<0{,}59x \\ &\Leftrightarrow \frac{18}{0{,}59}<x.\end{aligned}$$

Ainsi, la consommation dans la commune A devient plus avantageuse à partir d'environ 30,6 m^3.

Exercice 5 : (4 points)

On considère un parallélogramme $ABCD$.

Les points E et F vérifient les deux égalités suivantes : $\overrightarrow{DE} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BF} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{BC}$.

1 En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}\\ &= \overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}\\ &= \overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}, \text{ car ABCD est un parallélogramme, autrement dit car, } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.\end{aligned}$$

2 En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}\\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AD}, \text{ car ABCD est un parallélogramme, autrement dit car, } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

3 D'après le deux questions précédentes, on constate que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right)\\ &= \frac{3}{4}\overrightarrow{AF}.\end{aligned}$$

Ceci signifie que les deux vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires. En conséquence les points A, E et F sont alignés.