Seconde
maths-mde.fr

Devoir Surveillé n° 5

Corrigé

Lycée
Evariste Galois

Exercice 1 : (7 points)

Les six questions sont indépendantes.

1 En appliquant la première identité remarquable, on obtient : $x^2+2\sqrt{2}x+2=\left(x+\sqrt{2}\right)^2$.

2 En appliquant la première identité remarquable sur le premier terme et la deuxième identité remarquable sur le second terme, on obtient :

$$\begin{aligned}(x+\sqrt{2})^2-(x-\sqrt{2})^2 &= x^2+2\sqrt{2}x+\sqrt{2}^2-\left(x^2-2\sqrt{2}x+\sqrt{2}^2\right)\\ &= x^2+2\sqrt{2}x+\sqrt{2}^2-x^2+2\sqrt{2}x-\sqrt{2}^2\\ &= 4\sqrt{2}x.\end{aligned}$$

3 Si $x\in[-1;1]$, alors

$$\begin{aligned}-1\leqslant x\leqslant 1 &\Rightarrow -1\leqslant -x\leqslant 1\\ &\Rightarrow -2\leqslant -2x\leqslant 2\\ &\Rightarrow -1\leqslant -2x+1\leqslant 3\\ &\Rightarrow -\frac{1}{3}\leqslant \frac{-2x+1}{3}\leqslant \frac{3}{3}\\ &\Rightarrow x\in\left[-\frac{1}{3};1\right].\end{aligned}$$

4 -1 et 1 sont les deux valeurs interdites. Sous ces conditions :

$$\begin{aligned}\frac{2}{x-1}=\frac{3}{x+1} &\Leftrightarrow 2(x+1)=3(x-1)\\ &\Leftrightarrow 2x+2=3x-3\\ &\Leftrightarrow 2x-3x=-3-2\\ &\Leftrightarrow -x=-5\\ &\Leftrightarrow x=5.\end{aligned}$$

Ainsi, $S=\{5\}$.

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $6x-1\leqslant 2(x+1)$.

$$\begin{aligned}6x-1\leqslant 2(x+1) &\Leftrightarrow 6x-1\leqslant 2x+2\\ &\Leftrightarrow 6x-2x\leqslant 2+1\\ &\Leftrightarrow 4x\leqslant 3\\ &\Leftrightarrow x\leqslant \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Ainsi, $S=\left]-\infty;\frac{3}{4}\right]$.

6 Soit un parallélogramme ABCD. Compléter les égalités suivantes.

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{0}$

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}$

d) $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.

Exercice 2 : (2 points)

Déterminer les intersections et réunions d'intervalles suivantes :

g) $\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[\bigcap\left]-\infty;1\right[=\left]-\frac{7}{4};1\right[$

h) $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[\bigcap\left]-6;\frac{1}{3}\right[=\varnothing$

i) $]5;10]\bigcup[3;6]=[3;10]$.

j) $[2;6]\bigcup[4;+\infty[=[2;+\infty[$.

Exercice 3 : (3 points)

1 Soient a et b deux réels strictement positifs. En utilisant la troisième identité remarquable, on obtient :

$$\begin{aligned}\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\sqrt{a+b}\right]\times\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\sqrt{a+b}\right] &= \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-\sqrt{a+b}^2\\ &= \sqrt{a}^2+2\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{b}^2-(a+b)\\ &= a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b-(a+b)\\ &= 2\sqrt{a}\sqrt{b}.\end{aligned}$$

Or, $2\sqrt{a}\sqrt{b}>0$, ainsi $\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\sqrt{a+b}\right]\times\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\sqrt{a+b}\right]>0$.

2 On sait que pour tout a et b dans $\mathbb{R}_+^*$, $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\sqrt{a+b}>0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}&\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\sqrt{a+b}\right]\times\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\sqrt{a+b}\right]>0\\ \Leftrightarrow\ &\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\sqrt{a+b}>0\\ \Leftrightarrow\ &\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)>\sqrt{a+b}.\end{aligned}$$

Exercice 4 : (3 points)

Un parc de loisir propose deux formules d'abonnement.
Formule A : La carte à l'année coûte 55 € et le prix d'une entrée est de 20 €.
Formule B : La carte à l'année coûte 80 € et le prix d'une entrée est de 15 €.
On note y le nombre d'entrées.

1 Le coût à l'année avec la formule A est donné par l'expression : $20y+55$.

2 Le coût à l'année avec la formule B est donné par l'expression : $15y+80$.

3 Dire que la formule B est plus avantageuse que la formule A revient à dire $15y+80<20y+55$. Or,,

$$\begin{aligned}15y+80<20y+55 &\Leftrightarrow 80-55<20y-15y\\ &\Leftrightarrow 25<5y\\ &\Leftrightarrow \frac{25}{5}<y\\ &\Leftrightarrow 5<y.\end{aligned}$$

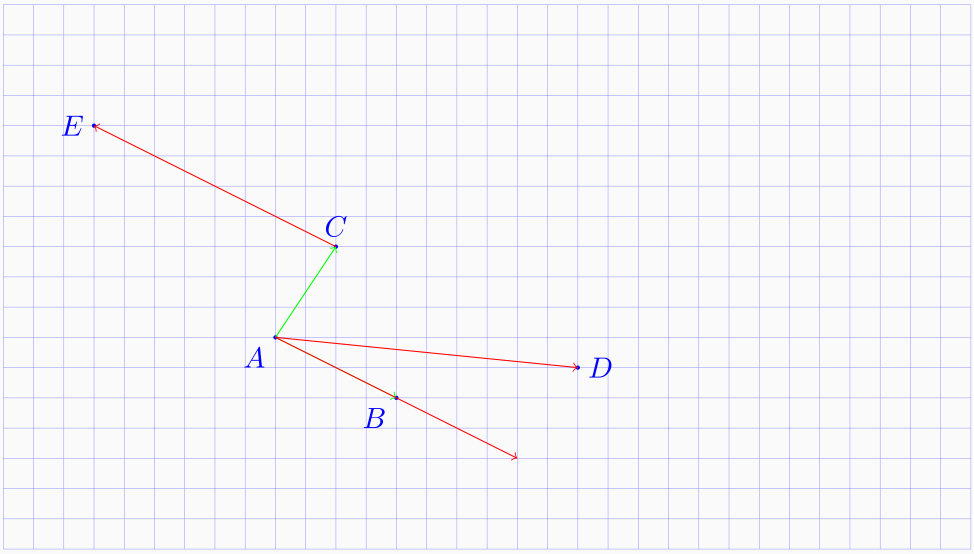
Ainsi, à partir de six entrées dans l'année, la formule B se révèle la plus intéressant.

Exercice 5 : (5 points)

Soit trois points A, B et C non alignés. On note D et E les points définis respectivement par

$$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\quad\text{et}\quad\overrightarrow{CE}=-2\overrightarrow{AB}.$$

1 Ci-après la figure.



$\boxed{\mathbf{2}}$ En utilisant la relation de Chasles, on obtient : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}$.
Or, $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Ainsi, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$, car $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ D'après la questions précédentes, les deux vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc les droites (CD) et (AB) sont parallèles.

$\boxed{\mathbf{4}}$ On sait que : $\overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$. Donc, $\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC}$.
Autrement dit, le point C est le milieu de $[DE]$.
Par conséquent, le point E est le symétrique du point D par rapport au point C.