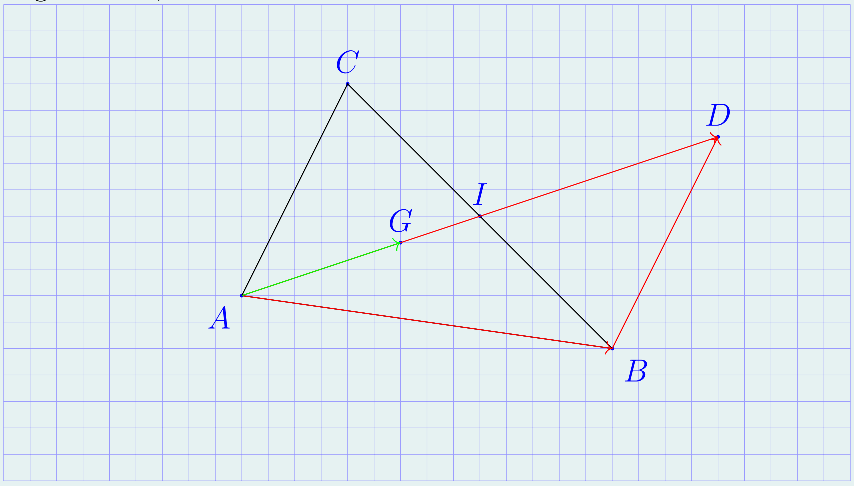
Devoir Maison n°4

Exercice 1 : (6 points)

On considère le triangle ABC, tracé ci-dessous.



1. Le point D est défini par $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Voir la figure.
2. Le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme, car $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
3. On sait que :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{AD} & = & \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ & = & \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} \\ & = & 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}. \end{array}$$

   Or, I le milieu du segment $[BC]$. Autrement dit, $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$. Par conséquent, $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AI}$.

4. (a) Le point G est défini par $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$. Voir la figure.

   (b) En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI} & \Leftrightarrow & \overrightarrow{IG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AI} \\ & \Leftrightarrow & \overrightarrow{IG} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AI} \\ & \Leftrightarrow & \overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{GI}. \end{array}$$

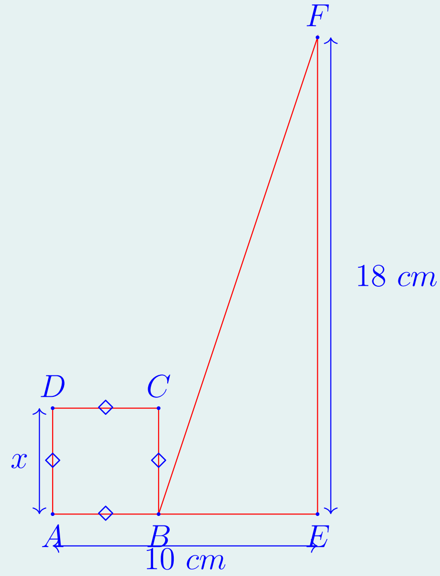
   Or, I les milieu de $[AD]$, autrement dit $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID}$. Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{ID} & \Leftrightarrow & \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{AI} \\ & \Leftrightarrow & \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GI} + 3\overrightarrow{GI} \\ & \Leftrightarrow & \overrightarrow{GD} = 4\overrightarrow{GI}. \end{array}$$

   (c) D'après la question précédente les deux vecteurs $\overrightarrow{GD}$ et $\overrightarrow{GI}$ sont colinéaires. Autement dit, les droites (GD) et (GI) sont parallèles. Or, ces deux droites ont un point commun, elles sont donc confondues. Par conséquent, les points G, I et D sont alignés.

Exercice 2 : (4 points)

$[AE]$ est un segment de longueur 10 cm.
On place un point B sur le segment $[AE]$ et on construit le carré $ABCD$ comme indiqué sur la figure ci-contre.
On construit le triangle BEF, rectangle en E tel que le côté $[FE]$ mesure 18 cm. On veut savoir où placer le point B sur le segment $[AE]$ pour que le carré et le triangle rectangle aient la même aire.



1. L'aire du carré $ABCD$ est égale à : x^2.
   L'aire du triangle FEB rectangle en E est égale à : $9(10-x)$.
   En effet, $\dfrac{(10-x)\times 18}{2} = (10-x)\times 9$.
   Ainsi, dire que l'aire du carré $ABCD$ est égale à l'aire du triangle BEF revient à dire bel et bien que, $x^2 = (10-x)\times 9$.
2. En développant le deuxième membre de l'égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} x^2 = (10-x)\times 9 &\Leftrightarrow x^2 = 90 - 9x \\ &\Leftrightarrow x^2 + 9x - 90 = 0. \end{aligned}$$

3. En utilisant la double distributivité, on obtient :

$$\begin{aligned} (x-6)(x+15) &= x\times x + x\times 15 + (-6)\times x + (-6)\times 15 \\ &= x^2 + 15x - 6x - 90 \\ &= x^2 + 9x - 90. \end{aligned}$$

4. Selon la question 2., l'aire du carré $ABCD$ est égale à l'aire du triangle BEF, quand $x^2+9x-90=0$.
   Or, $x^2+9x-90=(x-6)(x+15)$. Ainsi, les deux aires sont égales quand $(x-6)(x+15)=0$.
   C'est une équation produit nul qui admet deux solutions : 6 et -15.
   Par ailleurs x est une longueur, sa valeur ne peut être que positive.
   Cela veut dire que, l'aire du carré $ABCD$ est égale à celle du triangle BEF quand $x=6$.