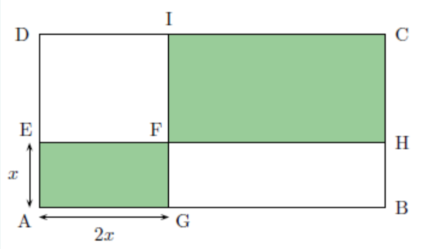
Corrigé : Devoir Maison n°3

Exercice 1 : (7 points)

$ABCD$ est un rectangle. On connait les longueurs AD = 4 cm et AB = 8 cm. E est un point du segment [AD]. On note AE = x. Le point G est sur le segment [AB], tel que AG = $2x$.
On construit les rectangles AEFG, EDIF, FICH et GFHB comme sur la figure ci-dessous.

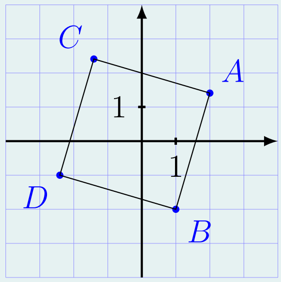


1. L'aire du rectangle $ABCD$:
   $AB \times AD = 4 \times 8 = 32 \quad cm^2$.
2. L'aire du rectangle $AEFG$ en fonction de x :
   $AE \times AG = x \times 2x = 2x^2$.
3. $CH = CB - BD = 4 - x$, et $IC = DC - DI = 8 - 2x$.
4. L'aire du rectangle $FICH$ en fonction de x :
   $FI \times FH = (4 - x)(8 - 2x)$.
5. L'expression développée et réduite de la somme des aires des rectangles $AEFG$ et $FICH$ (surface coloriée) :
   $2x^2 + (4 - x)(8 - 2x)$
   $= 2x^2 + (32 - 8x - 8x + 2x^2)$
   $= 4x^2 - 16x + 32$.
6. L'aire de la surface coloriée vaut la moitié de celle du rectangle $ABCD$, revient à dire :
   $4x^2 - 16x + 32 = \frac{32}{2}$
   $4x^2 - 16x + 32 = 16$
   $4(x^2 - 4x + 8) = 4 \times 4$
   $\frac{4(x^2-4x+8)}{4} = \frac{4\times4}{4}$
   donc, $x^2 - 4x + 8 = 4$.
7. $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$.
8. On conclut donc que l'aire de la surface coloriée vaut la moitié de celle du rectangle $ABCD$ quand : $(x - 2)^2 = 0$. Autrement dit, quand $x = 2$.
9. L'aire de la surface coloriée vaut les $\dfrac{5}{8}$ de celle du rectangle $ABCD$, revient à dire :
   $4x^2 - 16x + 32 = 32 \times \frac{5}{8}$
   $4x^2 - 16x + 32 = 20$
   $4x^2 - 16x + 12 = 0$
   $4(x^2 - 4x + 3) = 0$.
   $x^2 - 4x + 3 = 0$.
   Or, $(x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$.
   Ainsi, $(x - 1)(x - 3) = 0$. Par conséquent, les valeurs cherchées de x sont 1 et 3.

Exercice 2 : (3 points)

On considère les points $A(2; \sqrt{2})$, $B(1; -2)$, $C(-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2})$ et $D(-1-\sqrt{2}; -1)$.

1. Ci-après la figure obtenue :



2. Calculons les longueurs AB, BD, CD et AD :
   $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (-2-\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+4+4\sqrt{2}+2} = \sqrt{7+4\sqrt{2}}.$
   $BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(-2-\sqrt{2})^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{4+4\sqrt{2}+2+1} = \sqrt{7+4\sqrt{2}}.$
   $CD = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2} = \sqrt{(-\sqrt{2}+1+\sqrt{2})^2 + (2+\sqrt{2})^2} = \sqrt{7+4\sqrt{2}}.$
   $AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{(-\sqrt{2}-3)^2 + (-1-\sqrt{2})^2} = \sqrt{14+8\sqrt{2}}.$
3. En calculant AC, on obtient :
   $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-\sqrt{2}-2)^2 + (1+\sqrt{2}-\sqrt{2})^2} = \sqrt{7+4\sqrt{2}}.$
   Ainsi, $AC = AB = BD = DC$.
   Par ailleurs, dans le triangle ABD, on a :
   D'une part, $AD^2 = 14+8\sqrt{2}$.
   D'autre part, $AB^2 + BD^2 = 7+4\sqrt{2}+7+4\sqrt{2} = 14+8\sqrt{2}$.
   L'égalité $AD^2 = AB^2 + BD^2$ est vérifiée, alors d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ABD est rectangle en B.
   Le quadrilatère $ABCD$ a des côtés de même longueur et un angle droit, c'est donc un carré.