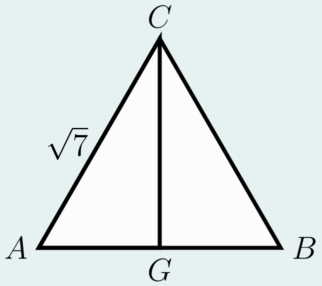
Devoir Maison n°2 - Corrigé

Exercice 1 : (5 points)

1. Soit $\mathcal{P}$ le périmètre du triangle ABC :
$\mathcal{P} = AB + BC + CA = 3\sqrt{7}$.
2. $[CG]$ est la hauteur issue de C, donc ACG est un triangle rectangle en G. Alors d'après le théorème de Pythagore :



$$\begin{aligned} AC^2 &= AG^2 + GC^2 \\ CG^2 &= AC^2 - AC^2 \\ CG^2 &= \sqrt{7}^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 \\ &= 7 - \frac{7}{4} \\ &= \frac{28}{4} - \frac{7}{4} \\ &= \frac{21}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi, $AC = \sqrt{\frac{21}{4}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$ cm.

Calculer la longueur de la hauteur CG.

3. Soit $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC : Calculer son aire.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} \\ &= \frac{AB \times CG}{2} \\ &= \frac{\sqrt{7} \times \frac{\sqrt{21}}{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{7} \times \frac{\sqrt{7 \times 3}}{2}}{2} \\ &= \sqrt{7} \times \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{7\sqrt{3}}{4} \quad \text{cm}^2. \end{aligned}$$

Exercice 2 : (5 points)

1. ABC est un triangle rectangle en B, alors d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= 7^2 + 4^2 \\ &= 65. \end{aligned}$$

Ainsi, $AC = \sqrt{65}$ cm.

2. On sait que les droites (AD) et (DC) sont sécantes en D. De plus, les droites (EI) et (AC) sont parallèles. Alors, d'après le théorème de Thalès : $\frac{DE}{DA} = \frac{DI}{DC} = \frac{EI}{AC}$. Ainsi, $\frac{1}{4} = \frac{DI}{7}$.
Dès lors, $DI = \frac{7}{4} = 1,75$ cm.
3. DAC est un triangle rectangle en D. Alors, $\tan\left(\widehat{DAC}\right) = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{DC}{AD} = \frac{7}{4}$.
Ainsi, $\widehat{DAC} = \arctan\left(\frac{7}{4}\right) \approx 60,3°$.

Exercice 3 : Facultatif

On appelle « nombre d'or » le nombre $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. D'une part, $\phi^2 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{5} = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

   D'autre par, $\phi + 1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

   Ainsi, $\phi^2 = \phi + 1$.

2. Supposons que $\phi = \dfrac{p}{q}$ avec p et q des entiers, cette fraction est irréductible.

   (a) D'après la question précédente, $\left(\dfrac{p}{q}\right)^2 = \dfrac{p}{q} + 1$. Autrement dit, $\dfrac{p^2}{q^2} = \dfrac{p}{q} + 1$. En multipliant les deux membres de l'égalité par q^2, on obtient le résultat $p^2 = q^2 + pq$.

   (b) Si p et q sont impairs alors p^2, q^2 et pq sont impairs (voir la démonstration : exercice 20). Or, la somme de deux nombres impairs donne toujours un nombre pair, donc $q^2 + pq$ est paire. Ce qui est contradictoire avec $p^2 = q^2 + pq$.

   (c) Si p est pair et q est impair, alors p^2 est pair, q^2 est impair et pq est pair, car le produit d'un nombre pair par un nombre impair donne toujours un nombre pair. De plus, $q^2 + pq$ est impaire, car la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair donne un nombre impair. Ce qui est contradictoire avec $p^2 = q^2 + pq$.

   (d) Si p est impair et q est pair, alors p^2 est impair, q^2 est pair et pq est pair, car le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair donne toujours un nombre pair. De plus, $q^2 + pq$ est paire, car la somme de deux nombre pairs donne un nombre pair. Ce qui est contradictoire avec $p^2 = q^2 + pq$.

   (e) Si p est pair et q est pair, alors p^2 est pair, q^2 est pair et pq est pair, car le produit d'un nombre pair par un nombre pair donne toujours un nombre pair. De plus, $q^2 + pq$ est paire, car la somme d'un nombre pair et d'un nombre pair donne un nombre pair.
   Ce dernier cas n'est pas possible, car la fraction $\dfrac{p}{q}$ est irréductible.

   (f) Conclusion : ϕ est irrationnel.