Corrigé : Devoir Maison n°2

Exercice 1 : (4 points)

Soit un rectangle ABCD avec $AB = 3AD = 3$.
On le découpe en trois carrés $AEGD$, $EFHG$ et $FBCH$ tous de côté 1.

1. Calculons ED, BD, BG et BH.

   ADE est un triangle rectangle en A, alors d'après le théorème de Pythagore, on a :
   $DE^2 = DA^2 + AE^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.
   Ainsi, $DE = \sqrt{2}$.
   ADB est un triangle rectangle en A, alors d'après le théorème de Pythagore, on a :
   $DB^2 = DA^2 + AB^2 = 1^2 + 3^2 = 10$.
   Ainsi, $DB = \sqrt{10}$.
   BGC est un triangle rectangle en C, alors d'après le théorème de Pythagore, on a :
   $GB^2 = GC^2 + CB^2 = 2^2 + 1^2 = 5$.
   Ainsi, $GB = \sqrt{5}$.
   BGC est un triangle rectangle en C, alors d'après le théorème de Pythagore, on a :
   $GB^2 = GC^2 + CB^2 = 2^2 + 1^2 = 5$.
   Ainsi, $GB = \sqrt{5}$.
   BHC est un triangle rectangle en C, alors d'après le théorème de Pythagore, on a :
   $HB^2 = HC^2 + CB^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.
   Ainsi, $GB = \sqrt{2}$.
   Par conséquent, $\dfrac{ED}{HG} = \dfrac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$, $\dfrac{DB}{GB} = \dfrac{\sqrt{10}}{5} = \sqrt{2}$ et $\dfrac{BE}{BH} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

2. D'après la question précédente, on a : $\dfrac{ED}{HG} = \dfrac{DB}{GB} = \dfrac{BE}{BH}$.
   La relation de proportionnalité entre les longueurs des côtés homologues des deux triangles EDB et HGB est vérifiée, ils sont donc semblables.

3. Les deux triangles EDB et HGB sont semblables, donc par définition leurs angles sont deux à deux de même mesure. Autrement dit :
   $\widehat{DBE} = \widehat{GBH}$, $\widehat{GHB} = \widehat{DEB}$ et $\widehat{EDB} = \widehat{HGB}$.

   Par ailleurs les deux angles $\widehat{CDB}$ et $\widehat{DBA}$ sont alternes-internes et donc égaux car ils sont définis par les droites parallèles (DC) et (AB).

   Idem, les deux angles $\widehat{CGB}$ et $\widehat{GBA}$ sont alternes-internes et donc égaux car ils sont définis par les droites parallèles (GC) et (AB).

   On peut dire la même chose pour les deux angles $\widehat{HBA}$ et $\widehat{CHB}$, alternes-internes et donc égaux car ils sont définis par des droites parallèles.

   On déduit en alors que, $\widehat{CHB} = \widehat{BHA} = \widehat{HBG} + \widehat{GBA} = \widehat{GDB} + \widehat{HGB}$.

Exercice 2 : (4 points)

On considère les points $A(3;1)$, $B(1;1)$, $C(1;3)$ et $D(3;3)$.

1. Calculons les distances AB, BC, CD et DA.
   $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{(1-3)^2} = 2.$
   $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(1-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{(2)^2} = 2.$
   $CD = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{(2)^2} = 2.$
   $AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{(3-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{(3-1)^2} = 2.$
   Ainsi, $AB = BC = CD = DA$.
   Par ailleurs, $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Autrement dit, $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Cela veut dire que le triangle ABC est rectangle en B, selon la réciproque du théorème de Pythagore.
   Par conséquent, le quadrilatère $ABCD$ est bel et bien un carré.
2. E est le milieu du segment $[AD]$, alors :
   $E\left(\dfrac{x_A + x_D}{2}; \dfrac{y_A + y_D}{2}\right) \Leftrightarrow E\left(\dfrac{3+3}{2}; \dfrac{1+3}{2}\right) \Leftrightarrow E\,(3;2)\,.$
   F est le milieu du segment $[CD]$, alors :
   $F\left(\dfrac{x_C + x_D}{2}; \dfrac{y_C + y_D}{2}\right) \Leftrightarrow F\left(\dfrac{1+3}{2}; \dfrac{3+3}{2}\right) \Leftrightarrow F\,(2;3)\,.$
   G est le milieu du segment $[AB]$, alors :
   $G\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right) \Leftrightarrow G\left(\dfrac{3+1}{2}; \dfrac{1+1}{2}\right) \Leftrightarrow G\,(2;1)\,.$
   H est le milieu du segment $[BC]$, alors :
   $H\left(\dfrac{x_C + x_B}{2}; \dfrac{y_C + y_B}{2}\right) \Leftrightarrow H\left(\dfrac{1+1}{2}; \dfrac{1+3}{2}\right) \Leftrightarrow H\,(1;2)\,.$
3. Un rayon du cercle de centre E passant par F et G est égal à :
   $EF = \sqrt{(x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2} = \sqrt{(2-3)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{2}.$
4. On appelle K le point d'intersection du cercle et du segment $[EH]$.
   $KE = EF = EG = \sqrt{2}$ et $HK = 2 - \sqrt{2}$.

Exercice 3 : (2 points)

D est bel et bien un nombre entier. En effet,

$$D = \frac{5\sqrt{12}}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{4\times 3}}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{4}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{5\times 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 5.$$