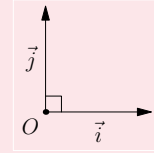


1 Translations et vecteurs associés

Définition

Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires du plan dont les directions sont perpendiculaires et tels que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$.

- Le couple $(\vec{i}, \vec{j})$ est appelé base orthonormée des vecteurs du plan.
- Le triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est appelé le repère du plan, où O est un point de ce plan, appelé l'origine.



Définition

On appelle **coordonnées** d'un vecteur $\vec{u}$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ l'unique couple de réels (x, y) tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. x est appelé **abscisse** de $\vec{u}$ et y est appelé **ordonnée** de $\vec{u}$.

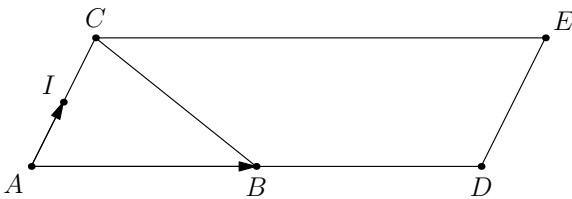
Notation : $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $\vec{u}(x, y)$. Autrement dit, $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Propriété

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées.

Autrement dit, les deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont égaux si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.

Exemple. Dans la figure ci-dessous, $ADEC$ est un parallélogramme, B est le milieu de $[AD]$ et I est le milieu de $[AC]$.



Les deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AI}$ sont par définition non colinéaires.

Posons $\vec{AB} = \vec{i}$ et $\vec{AI} = \vec{j}$. $(A, \vec{i}, \vec{j})$ forme un repère du plan d'origine A . Nous avons alors :

$$— \vec{AE} = \dots \vec{i} + \dots \vec{j} \Leftrightarrow \vec{AE} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}.$$

$$— \vec{BC} = \dots \vec{i} + \dots \vec{j} \Leftrightarrow \vec{BC} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}.$$

$$— \vec{DI} = \dots \vec{i} + \dots \vec{j} \Leftrightarrow \vec{DI} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}.$$

2 Somme et différence de deux vecteurs

Propriété

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs définis, dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.

- Les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ s'obtiennent en additionnant les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, autrement dit :

$$\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}.$$

- Les coordonnées du vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ s'obtiennent en soustrayant les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, autrement

dit :

$$\vec{u} - \vec{v} \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}.$$

Exemple. Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ deux vecteurs définis, dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.

$\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$. Soit, $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{u} - \vec{v}$. Soit, $\vec{u} - \vec{v} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$.

3 Multiplication d'un vecteur par un réel

Propriété

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur défini dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ et k un nombre réel.

— Les coordonnées du vecteur $k\vec{u}$ s'obtiennent en multipliant les coordonnées de $\vec{u}$ par k , autrement dit :

$$k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}.$$

— $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ sont les coordonnées du vecteur opposé $-\vec{u}$ de $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Exemple. Dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$, si $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors :

$$3\vec{u} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \leftarrow \dots \times \dots ;$$

$$-4\vec{u} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \leftarrow \dots \times \dots ;$$

$$3\vec{u} - 2\vec{v} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \leftarrow \dots \times \dots - \dots \times \dots .$$

4 Norme d'un vecteur

Propriété

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, la norme d'un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exemple. Si $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ alors

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ alors

Propriété

Dans une base orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Si $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$, alors :

$$— \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix}.$$

— La norme de $\overrightarrow{AB}$ est alors donnée par la formule $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

5 Colinéarité de vecteurs

Définition

Dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$, on appelle **déterminant** des vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ le réel noté $\det(\vec{u}, \vec{v})$ défini par : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$.

Exemple. — Si $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) =$
 — Si $\vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) =$

Propriété

Dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$, deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Démonstration : Dans le cas de deux vecteurs non nuls.

- Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires, autrement dit, il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v} \Rightarrow x = kx'$ et $y = ky' \Rightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = x \times y' - y \times x' = kx' \times y' - ky' \times x' = 0$.
- Si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ alors on a $x \times y' - y \times x' = 0 \Rightarrow x \times y' = y \times x'$.
 En supposant que $x \neq 0$, on en déduit que $y' = \frac{x'}{x} \times y$. Or, comme on a aussi $x' = \frac{x'}{x} \times x$, on peut en conclure que $\vec{v} = \frac{x'}{x} \vec{u}$ et que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Propriété

Deux droites (AB) et (MN) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires. Autrement dit si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}) = 0$.

Exemple. Soient $A(2;3)$, $B(5;4)$, $M(5;1)$ et $N(-1;-1)$ des points d'un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Montrer que $(AB) // (MN)$

Propriété

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points A , B et C sont alignés si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$.

Exemple. Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points $A \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ sont alignés. Montrer que les points A , B et C sont alignés.