

1 Notion de fonction

Définition

Soit D un ensemble, un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

- Une fonction f définie sur D est une relation qui à tout x de D associe un **unique** réel, noté $f(x)$ et appelé **image** de x par f .
- L'**ensemble de définition** D de la fonction f est l'ensemble des nombres pour lesquels il existe une image par la fonction.

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 3$.

- 3 est l'image de 0 par f . En effet,
- 5 est l'image de 1 par f . En effet,

Définition

On considère une fonction f définie sur D .

On appelle **antécédents** de b par f , tous les réels x de D tels que $f(x) = b$.

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.

- 0 est le seul antécédent de 1 par f . En effet,
- 2 et -2 sont les deux antécédents de 5 par f . En effet,

Définition

Soit f une fonction, D son ensemble de définition et x un élément de D .

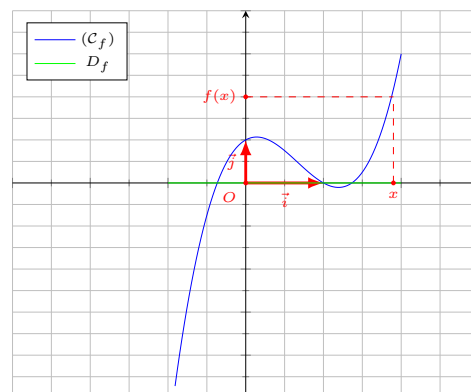
Un **tableau de valeurs** d'une fonction f donne, sur la première ligne, différentes valeurs de x désignant des antécédents et, en vis-à-vis sur la deuxième ligne, les images $f(x)$ qui leur sont associées.

Exemple. La fonction $f : x \rightarrow \frac{-8}{5}x^2 + 8x$ admet le tableau de valeurs ci-après.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$	0	3.6	6.4	8.4	9.6	10	9.6	8.4	6.4	3.6	0

2 Courbe représentative d'une fonction

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on appelle courbe représentative de la fonction f définie sur D_f , l'ensemble des points **d'abscisse x et d'ordonnée $f(x)$** pour tous les x de D_f .
 C_f désigne la courbe de la fonction f .
 $y = f(x)$ est une équation cartésienne de la courbe C_f .



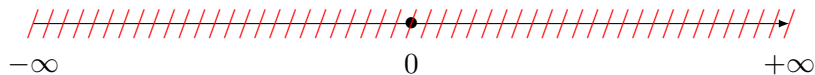
3 Fonction paire et fonction impaire

Définition

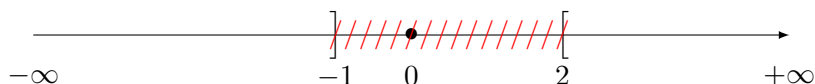
Un ensemble I de $\mathbb{R}$ est dit symétrique par rapport à 0 si pour tout x de I , $-x$ est aussi dans I .

Exemples. Ensembles symétriques.

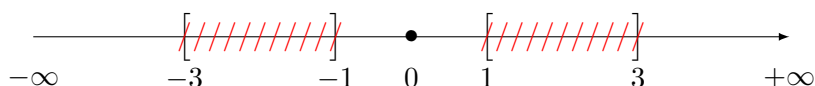
— $\mathbb{R}$ est



— $] -1 ; 2[$



— $[-3 ; -1] \cup [1 ; 3]$



Définition

Une fonction f définie sur un ensemble I de $\mathbb{R}$ est dite **paire** si I est symétrique par rapport à 0 et si, pour tout x de I , on a $f(-x) = f(x)$.

Exemple. 1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2$ est paire. En effet,

.....
.....

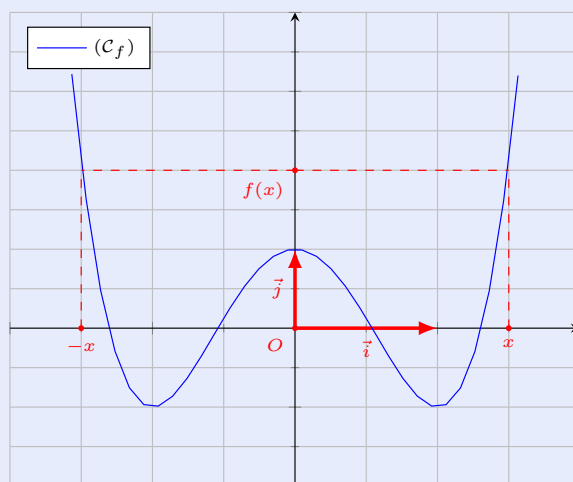
2. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$ n'est pas paire. En effet,

.....
.....
.....

Propriété

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction f paire est

.....



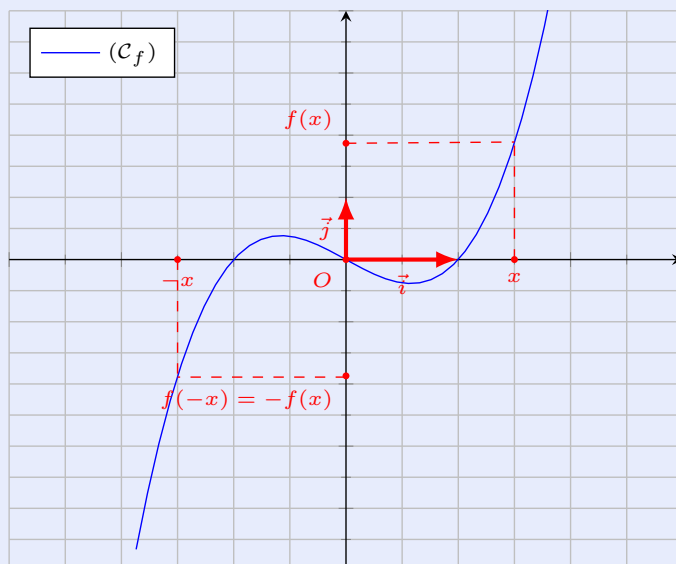
Définition

Une fonction f définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ est dite **impaire** si I est symétrique par rapport à 0 et si, pour tout x de I , on a $f(-x) = -f(x)$.

Exemple. La fonction f définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{x}$ est impaire car

Propriété

La courbe représentative d'une fonction f impaire est

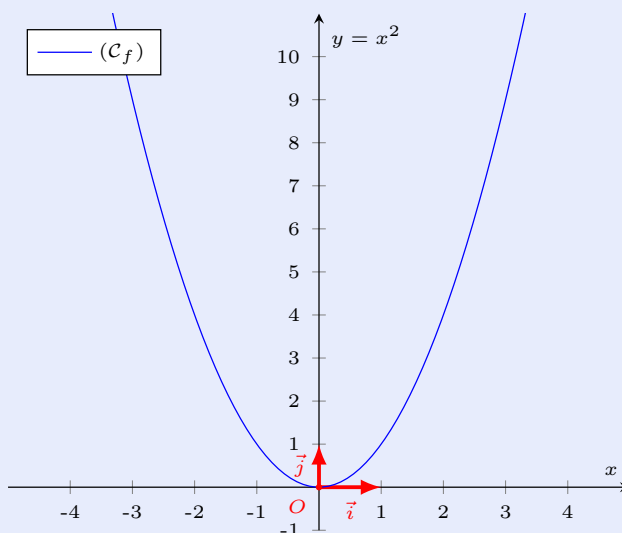


4 Quelques exemples de fonctions de référence

4.1 Fonction carré

Propriété

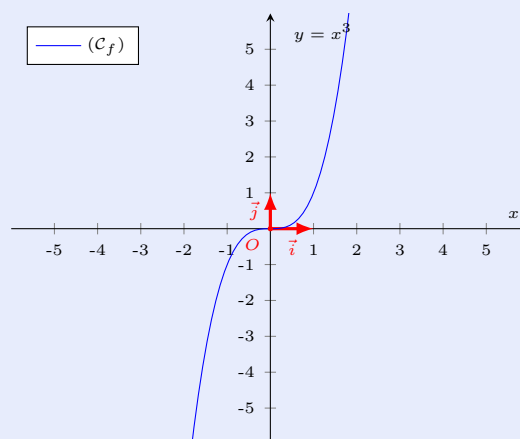
- La fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
- Sa courbe représentative est une
- La fonction carrée est paire. En effet,



4.2 Fonction cube

Propriété

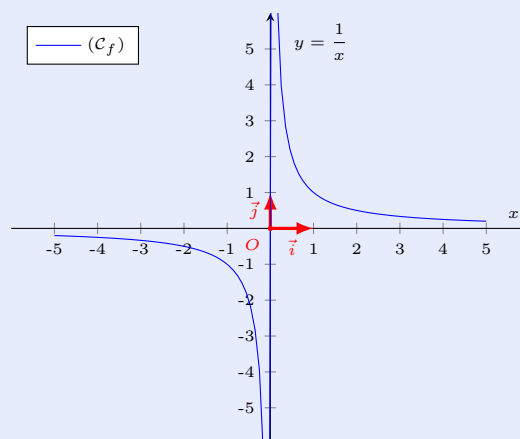
- La fonction cube est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
- La fonction cube est impaire. En effet,
.....
.....
.....
.....
- Sa courbe représentative est
.....
.....
.....
.....



4.3 Fonction inverse

Propriété

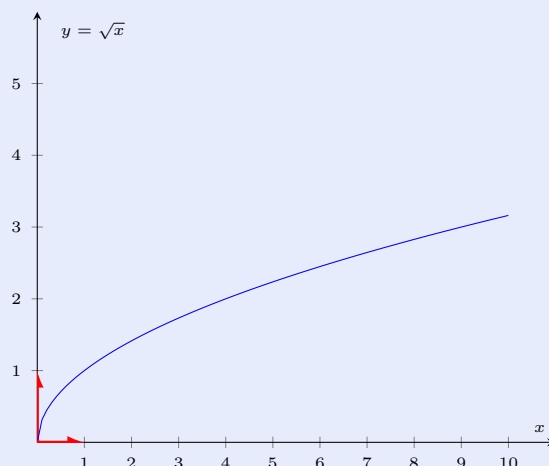
- La fonction inverse est définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
- Sa courbe représentative est une
.....
- La fonction inverse est impaire. En effet,
.....
.....
.....
.....



4.4 Fonction racine carrée

Propriété

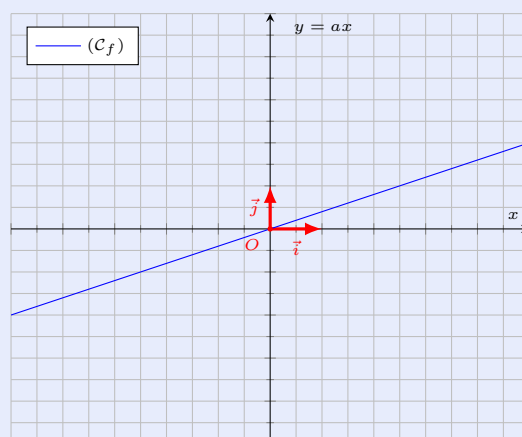
- La fonction racine carrée est définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
- Sa courbe représentative est donnée ci-après.



4.5 Fonction linéaire

Propriété

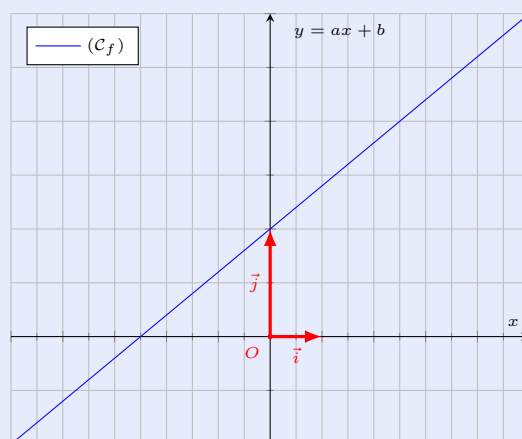
- La fonction linéaire est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax$.
- Sa courbe représentative est
- Elle représente une situation
- a est son coefficient directeur, son coefficient de proportionnalité.
- Elle est impaire. En effet,



4.6 Fonction affine

Propriété

- La fonction affine est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
- Sa courbe représentative est
- a est son coefficient directeur et b est l'ordonnée à l'origine.



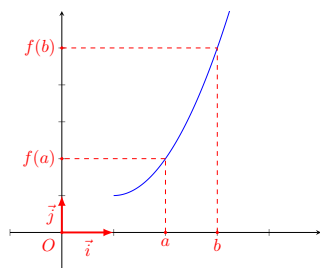
5 Sens de variation d'une fonction sur un ensemble de $\mathbb{R}$

Définition

- Une fonction f est dite **croissante** sur un intervalle I si, pour **tous** les réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) \leq f(b)$.
- Une fonction f est dite **décroissante** sur un intervalle I si, pour **tous** les réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) \geq f(b)$.
- Quand une fonction reste croissante ou décroissante sur un intervalle, on dit qu'elle est monotone sur cet intervalle.

Fonction croissante : $a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$.

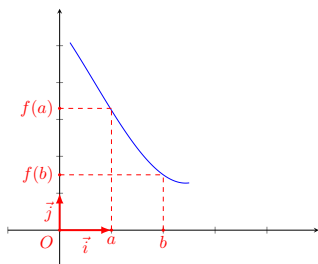
Tableau de variations :



x	a	b
$f(x)$	$f(a)$	$f(b)$

Fonction décroissante : $a \leq b \implies f(a) \geq f(b)$.

Tableau de variation :



x	a	b
$f(x)$	$f(a)$	$f(b)$

Définition

- Si, pour **tous** les réels a et b de I tels que $a < b$, $f(a) < f(b)$ on dit alors que f est **strictement croissante** sur I .
- Si, pour **tous** les réels a et b de I tels que $a < b$, $f(a) > f(b)$ dans la définition, on dit alors que f est **strictement décroissante** sur I .

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 1$.

- *Étude du sens de variation de f sur $]-\infty; 0[$:*

Pour tous réels a et b dans $]-\infty; 0[$ tels que $b - a > 0$, on a :

$$f(b) - f(a) = 3b^2 + 1 - 3a^2 - 1 = 3(b^2 - a^2) = 3 \underbrace{(b - a)}_{>0} \times \underbrace{(b + a)}_{<0} \quad \text{car } b < 0 \text{ et } a < 0.$$

Ainsi, $f(b) - f(a) < 0$ sur $]-\infty; 0[$.

Autrement dit, f est décroissante sur $]-\infty; 0[$.

- *Étude du sens de variation de f sur $]0; +\infty[$:*

Pour tous réels a et b dans $]0; +\infty[$ tels que $b - a > 0$, on a :

$$f(b) - f(a) = 3b^2 + 1 - 3a^2 - 1 = 3(b^2 - a^2) = 3 \underbrace{(b - a)}_{>0} \times \underbrace{(b + a)}_{>0} \quad \text{car } b > 0 \text{ et } a > 0.$$

Ainsi, $f(b) - f(a) > 0$ sur $]0; +\infty[$.

Autrement dit, f est croissante sur $]0; +\infty[$.

- *Tableau de variations :*

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		$f(0) = 1$	

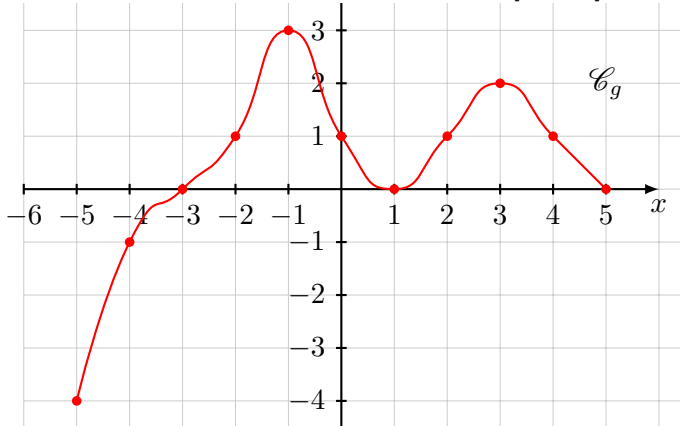
6 Extremum d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- On dit que f admet un **minimum** m sur I , s'il existe a de I tel que $f(a) = m$ et $f(x) \geq m$, pour tout x de I .
- On dit que f admet un **maximum** M sur I , s'il existe b de I tel que $f(b) = M$ et $f(x) \leq M$, pour tout x de I .

Exemple. Une fonction g est définie sur $[-5; 5]$ par sa courbe ci-dessous.



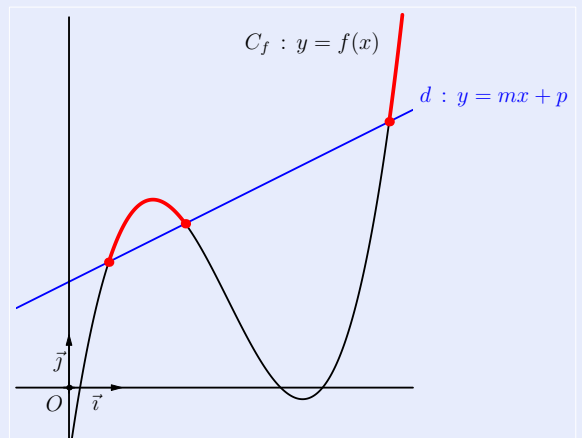
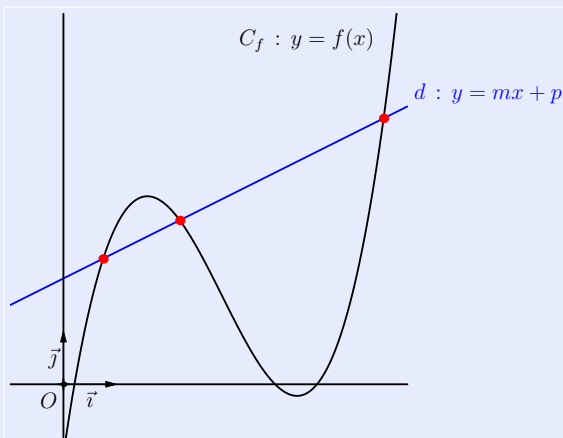
- $g(-1) = 3$, autrement dit 3 est l'image de -1 par g .
- $-2, 0, 2$ et 4 sont les antécédents de 1 par la fonction g .
- g admet un minimum sur $[-5; 5]$ en
- g admet un minimum sur $[-4; 3]$ en
- g admet un maximum sur $[-5; 5]$ en
- g admet un maximum sur $[1; 5]$ en

7 Résolution graphique d'équations et d'inéquations

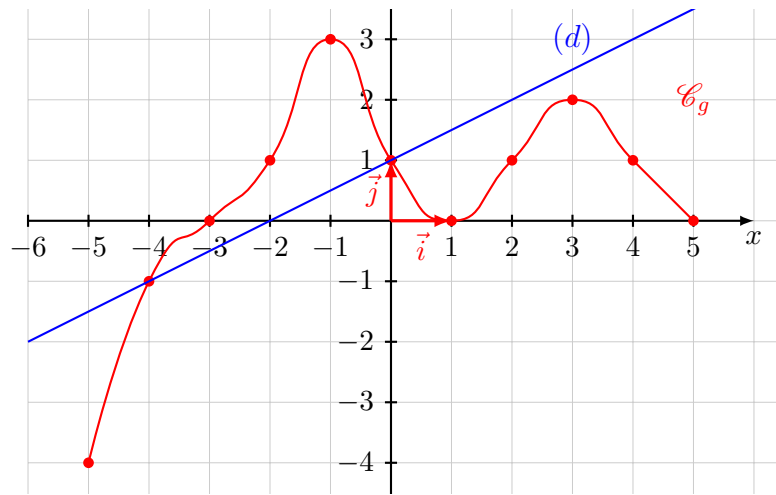
Propriété

Soient f une fonction définie sur un ensemble I de $\mathbb{R}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère.

- Les solutions sur I de l'équation $f(x) = mx + p$ sont les abscisses des points d'intersection entre la courbe C_f et la droite (d) d'équation $y = mx + p$.
- Les solutions sur I de l'inéquation $f(x) \geq mx + p$ sont les abscisses des points de la courbe C_f situés au dessus et sur la droite (d) d'équation $y = mx + p$.



Exemple. Soient g une fonction est définie sur $[-5; 5]$ par sa courbe ci-dessous et (d) la droite d'équation $y = \frac{x}{2} + 1$.



- ... et ... sont les solutions de l'équation $g(x) = \frac{x}{2} + 1$.
- L'ensemble représente les solutions de l'inéquation $g(x) \geq \frac{x}{2} + 1$.
- L'ensemble représente les solutions de l'inéquation $g(x) \leq \frac{x}{2} + 1$.