

1 Les ensembles de nombres

Définition

L'ensemble des **entiers naturels** est noté $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}.$$

Définition

L'ensemble des **entiers relatifs** est noté $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}.$$

Remarque. Comme tous les éléments de $\mathbb{N}$ sont aussi dans $\mathbb{Z}$, on dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$ et on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Définition

L'ensemble des **nombre décimaux** est noté $\mathbb{D}$.

Tout nombre pouvant s'écrire sous la forme $\frac{m}{10^n}$ est appelé **nombre décimal**, avec m et n des nombres relatifs.

Remarque. Comme tous les éléments de $\mathbb{Z}$ sont aussi dans $\mathbb{D}$, on dit que $\mathbb{Z}$ est inclus dans $\mathbb{D}$, on note $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

Exemples. $-3,1$ est un nombre décimal car il peut s'écrire sous la forme $\frac{-31}{10}$.

Définition

L'ensemble des **nombre rationnels** est noté $\mathbb{Q}$.

Tout nombre pouvant s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ est appelé **nombre rationnel**, avec p et q des nombres relatifs et $q \neq 0$.

Remarque. Comme tous les nombres décimaux $\mathbb{D}$ sont aussi dans $\mathbb{Q}$, on dit que $\mathbb{D}$ est inclus dans $\mathbb{Q}$ et note $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Exemples. $\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{7}$ sont des nombres rationnels, ce ne sont pas des nombres décimaux.

Définition

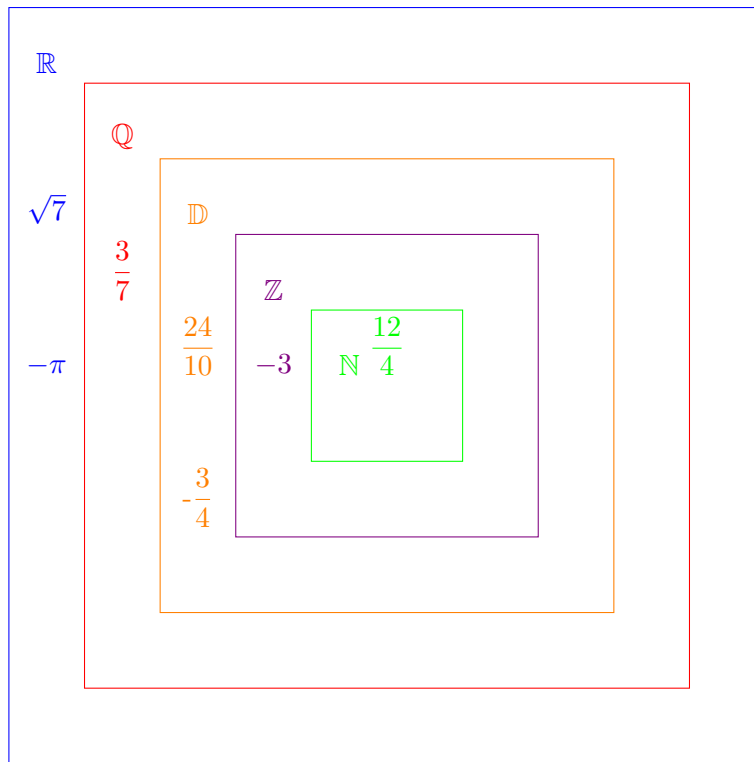
L'ensemble des **nombre réels** est noté $\mathbb{R}$.

$\sqrt{2}$ et π sont des nombres dits irrationnels car ils ne peuvent pas s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Remarque. Comme tous les nombres rationnels $\mathbb{Q}$ sont aussi dans $\mathbb{R}$, on dit que $\mathbb{Q}$ est inclus dans $\mathbb{R}$ et note $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



Bilan :



2 Quelques propriétés dans $\mathbb{N}$.

Définition

On dit que a divise b si on peut trouver un nombre k tel que $a \times k = b$. On note $a|b$.
On dit que b est un multiple de a si on peut trouver un nombre k tel que $b = a \times k$.

Exemple. 3 divise 21 et 21 est un multiple de 3 car $3 \times 7 = 21$, on note $3|21$.

Propriété

Si $a|b$ et $a|c$ alors $a|b \pm c$.

Démonstration

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exemple. On sait que, $3|12$ et $3|9$. Ainsi, $3|12 + 9$ et $3|12 - 9$.

Définition

Soit n un nombre entier.

- n est pair si et seulement s'il existe un entier p tel que $n = 2p$.
- n est impair si et seulement s'il existe un entier p tel que $n = 2p + 1$.

Propriété

Si n est impair alors n^2 est impair.

Démonstration

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Définition

Un entier naturel est premier s'il n'admet que deux diviseurs : 1 et lui-même.



Par convention, 1 n'est pas premier.

Propriété

Il existe une infinité de nombres premiers.

Exemple. 2, 3, 5, 7, 11 sont premiers.

Propriété

Un nombre entier supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers. Cette décomposition est unique.

Exemple. Décomposer 2 088 en produit de facteurs premiers.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Donc,

3 Quelques propriétés dans $\mathbb{R}$

Propriété. Commutativité & Distributivité

Soient a , b et c des réels.

- $a(bc) = (ab)c$
- $a(b + c) = ab + ac$

Exemple. $3(x - 4) = 3x - 12$

$$2(3x^2) = (2 \times 3)x^2 = 6x^2$$

.....

.....

.....

3.1 Opérations sur les nombres rationnels

Propriété. Règles de calculs

Soient a, b, c, d et k des réels.

- $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$, avec $b \neq 0$ et $k \neq 0$.
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$, avec $b \neq 0$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{d} + \frac{c}{d} \times \frac{b}{b} = \frac{ad+bc}{bd}$, avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.
- $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$, avec $b \neq 0$ et $a \neq 0$.
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$, avec $b \neq 0, c \neq 0$ et $d \neq 0$.

Exemples. $\frac{8}{12} = \dots\dots\dots$
 $\frac{1}{3} + \frac{4}{5} = \dots\dots\dots$
 $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \dots\dots\dots$
 $\frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = \dots\dots\dots$
 $\frac{1}{3} = \dots\dots\dots$
 $\frac{2}{2} = \dots\dots\dots$
 $\frac{3}{5} = \dots\dots\dots$
 $\frac{2}{2} = \dots\dots\dots$

Propriété. Règles des signes

Soient a et b deux réels.

- $-(-a) = a$.
- $-(a+b) = -a-b$.
- $-(a-b) = -a+b$.
- $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$, avec $b \neq 0$.
- $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$, avec $b \neq 0$.

Exemples. $-(-2x) = \dots\dots\dots$; $-(2+x) = \dots\dots\dots$; $-(3x-4) = \dots\dots\dots$; $\frac{-x}{-3} = \dots\dots\dots$.

3.2 Racine carrée

Définition

Soit a un nombre réel positif. On appelle racine carrée de a (notée $\sqrt{a}$) le nombre positif dont le carré vaut a .

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

Exemple. $\sqrt{2}$ est le nombre positif dont le carré est égal à 2. On a donc $(\sqrt{2})^2 = 2$.



Un nombre réel négatif n'a pas de racine carrée.

Propriété

Pour tous nombres réels positifs a et b :

- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$;
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ avec $b \neq 0$.

Exemple. — $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$.

$$\text{— } \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}.$$



$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Exemple. $\sqrt{16} + \sqrt{9} \neq \sqrt{25}$. En effet, $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ et $\sqrt{25} = 5$.

Propriété

Pour éliminer la racine du dénominateur d'une fraction de la forme $\frac{1}{\sqrt{a}}$, il suffit de multiplier en haut et en bas par $\sqrt{a}$.

Exemples. $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

.....

.....

Propriété. Expressions conjuguées

Pour tous réels a et b strictement positifs, les expressions $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ et $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ sont dites conjuguées l'une de l'autre et leur produit est égal à $a - b$.

Exemples. L'expression conjuguée de $(\sqrt{2} - \sqrt{3})$ est $(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ et l'expression conjuguée de $(3 - \sqrt{2})$ est $(3 + \sqrt{2})$.

$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{5 - 3} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}.$$

.....

.....

.....

3.3 Opérations sur les puissances

Propriété

Soit n un nombre entier strictement positif.

Pour écrire $\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$, on note « a^n ». On lit « a puissance n » ou « a exposant n ».

Cas particuliers : $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.

Exemples. $3^2 = \dots\dots$; $5^3 = \dots\dots$; $(-4)^2 = \dots\dots$.

Propriété

Soient a et b deux nombres relatifs et m et n deux entiers relatifs, on a :

- ★ $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- ★ $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- ★ $(a^n)^m = a^{n \times m}$
- ★ $a^n \times b^n = (ab)^n$

$$\star \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Exemples. $\frac{5^7}{5^3} = \dots\dots\dots$; $\frac{x^5}{x^{-2}} = \dots\dots\dots$; $\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \dots\dots\dots$.

Propriété

Pour tout réel non nul a et pour tout entier strictement positif n , la puissance $(-n)^{\text{ième}}$ de a est le réel noté a^{-n} tel que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Exemples. • $2^{-3} = \dots\dots\dots$ • $3^{-1} = \dots\dots\dots$.

Définition.

Ecrire un nombre en notation scientifique, c'est l'écrire sous la forme :

$$a \times 10^n$$

avec, $1 \leq a < 10$.

Exemples. $138\,000\,000 = \dots\dots\dots$;
 $0,0017 = 1,7 \times 0,001 = \dots\dots\dots$;
 $0,428 = 4,28 \times 0,1 = \dots\dots\dots$.