

1 Identités remarquables

Propriété

Pour tous les a et b dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{développer}} \\ - (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \\ \xleftarrow{\text{factoriser}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{développer}} \\ - (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \\ \xleftarrow{\text{factoriser}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{développer}} \\ - (a - b)(a + b) = a^2 - b^2. \\ \xleftarrow{\text{factoriser}} \end{array}$$

Démonstration

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exemples. Développer en utilisant les identités remarquables.

- $(x + 3)^2 =$
- $(3x + 5)^2 =$
- $(4 - x)^2 =$
- $(2x - 6)^2 =$
- $(x - \sqrt{3})^2 =$
- $(7 - x)(7 + x) =$
- $(5x - 1)(5x + 1) =$

Exemples. Factoriser en utilisant les identités remarquables.

- $x^2 - 4 =$
- $9 - 4x^2 =$
- $x^2 + 10x + 25 =$
- $x^2 - 14x + 49 =$

2 Équation type $ax + b = 0$

Définition

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $ax + b = 0$, avec $a \neq 0$, c'est déterminer l'ensemble S de tous les réels x vérifiant cette égalité $ax + b = 0$.

Exemples. 1. Résolution de l'équation $2x + 3 = 0$:

.....

.....

2. Résolution de l'équation $3x - 4 = 0$:

.....

.....

3. Résolution de l'équation $-\frac{1}{2}x + 7 = 0$:

.....

.....

.....

4. Résolution de l'équation $7x = 0$:

.....

.....

Propriété

Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors l'équation $ax + b = 0$ n'admet pas de solution.

3 Équation pouvant s'écrire sous la forme :

$$ax + b = 0$$

Exemples. 1. Résolution de l'équation $2x - 4 = 5x + 1$:

• On regroupe d'un côté tous les termes qui dépendent de x et tout le reste dans l'autre :

$$2x - 4 = 5x + 1 \Leftrightarrow 2x - 5x = 1 + 4 \Leftrightarrow -3x = 5.$$

• Il n'y a plus qu'à diviser par le coefficient de x :

$$-3x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{-3}.$$

$$\text{Ainsi, } S = \left\{ -\frac{5}{3} \right\}.$$

2. Résolution de $2(x + 3) = x - 1$:

On développe le premier membre de l'équation et on retrouve un cas similaire à l'exemple précédent.

.....
.....
.....
.....

3. Résolution de l'équation $3(x - 1) - 2(3 + x) = 6x + 12$:

.....
.....
.....
.....
.....

Propriété

Si $a = 0$, $c = 0$ et $b \neq d$ alors l'équation $ax + b = cx + d$ n'admet pas de solution.

Propriété

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est égal à 0 et son dénominateur est non nul.



Comme nous ne pouvons pas diviser par 0, le calcul de type $\frac{x+a}{x+b}$ ne peut pas être effectué quand $x = -b$. On parle alors de valeur interdite ou d'une forme indéterminée.



Rappel : Produit en croix.

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow A \times D = B \times C.$$

Exemples. 1. Résolution de l'équation $\frac{2-x}{x-1} = 2$.

1 est la valeur interdite, en effet, il faut que $x - 1 \neq 0$. Autrement dit, $x \neq 1$. Dans ces conditions,

$$\frac{2-x}{x-1} = 2 \Leftrightarrow 2-x = 2 \times (x-1)$$

$$\Leftrightarrow 2-x = 2x-2$$

$$\Leftrightarrow 2+2 = 2x+x$$

$$\Leftrightarrow 4 = 3x$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3} = x. \text{ Ainsi, } S = \left\{ \frac{4}{3} \right\}.$$

2. Résolution de l'équation $\frac{12}{x+1} = 3$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Résolution de l'équation $\frac{3}{x+2} = \frac{4}{3x}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4 Résolution de l'équation $\frac{1}{x} = k$ avec $x \neq 0$ et $k \in \mathbb{R}$

Propriété

- Si $k = 0$, l'équation $\frac{1}{x} = k$ n'admet pas de solution.
- Si $k \neq 0$, l'équation $\frac{1}{x} = k$ admet une seule solution réelle $x = \frac{1}{k}$.

Démonstration

- Si $k = 0$, $\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow 1 = x \times 0 = 0 \Rightarrow 1 = 0$, ce qui est absurde. Par conséquent cette équation n'admet pas de solution.
- Si $k \neq 0$, $\frac{1}{x} = k \iff \frac{1}{x} - k = 0 \iff \frac{1 - kx}{x} = 0 \iff 1 - kx = 0 \iff x = \frac{1}{k}$.
Ainsi, $\frac{1}{k}$ est la solution de cette équation. Autrement dit, $S = \left\{ \frac{1}{k} \right\}$, avec $k \neq 0$.

Exemples. — L'équation $\frac{1}{x} = 5$ a pour solution

— L'équation $\frac{1}{x} = \frac{1}{3}$ a pour solution

5 Équation produit nul

Propriété

Si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul. Autrement dit,

$$\text{Si } A \times B = 0 \text{ alors } A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

Exemples. — Résolution de l'équation $(2x - 8)(6 - 3x) = 0$.

$$(2x - 8)(6 - 3x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 8 = 0 \text{ ou } 6 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 8 \text{ ou } -3x = -6$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8}{2} = 4 \text{ ou } x = \frac{-6}{-3} = 2. \text{ Ainsi, } S = \{4; 2\}$$

— Résolution de l'équation $(2x + 5)\left(3 - \frac{x}{2}\right) = 0$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

— Résolution de $\frac{(2x + 3)^2 - 9}{x} = 0$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

6 Équation du type $x^2 = a$

Propriété

Les solutions de l'équation $x^2 = a$, avec $a > 0$, sont :

$$-\sqrt{a} \text{ et } \sqrt{a}.$$

Remarque. Si a est négatif l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Exemples. 1. Résolution de l'équation $x^2 = 4$.

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{4} = 2 \text{ ou } x = -\sqrt{4} = -2. \text{ Ainsi, } S = \{2; -2\}$$

2. Résolution de l'équation $x^2 = -3$.

Cette équation n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, $S = \emptyset$.

3. Résolution de $(x - 3)^2 = 25$.

$$(x - 3)^2 = 25 \Leftrightarrow x - 3 = \sqrt{25} \text{ ou } x - 3 = -\sqrt{25}$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = 5 \text{ ou } x - 3 = -5$$

$$\Leftrightarrow x = 5 + 3 \text{ ou } x = -5 + 3$$

$$\Leftrightarrow x = 8 \text{ ou } x = -2. \text{ Ainsi, } S = \{8; -2\}.$$