Corrigés

Série d'exercices | Classe : Seconde | Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

Dans la figure ci-dessous, $AB = BC = CD$:

a) $\overrightarrow{AC} = \boxed{2}\,\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{CA} = \boxed{-2}\,\overrightarrow{CD}$

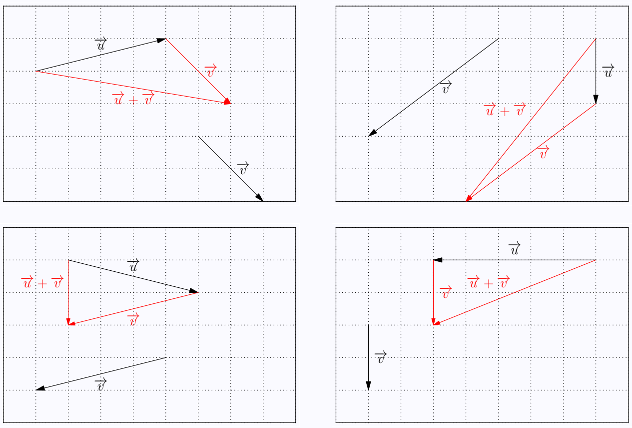
c) $\overrightarrow{DA} = \boxed{-3}\,\overrightarrow{AB}$

Exercice n°2

Dans la figure ci-dessous, $AB = 1$, $BC = 2$ et $CD = 4$:

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \boxed{3}\,\overrightarrow{AB}$
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \boxed{-1}\,\overrightarrow{AB}$
3. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} = \boxed{-2}\,\overrightarrow{AB}$.

Exercice n°3



Exercice n°4

ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.
On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. On a alors :

— $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{u}$.

— $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD} = -\vec{v}$.

— $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} = -\vec{v}$.

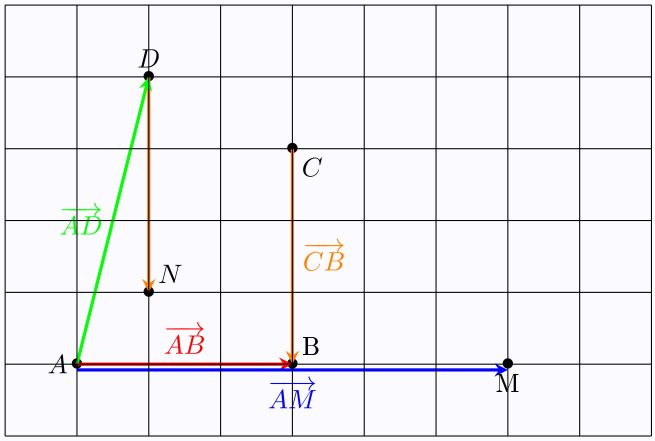
— $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

— $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}$.

— $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -\vec{u} - \vec{v}$.

Exercice n°5

A, B, C et D sont quatre points du plan.



1. Construire le point M tel que
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$.

2. Construire le point N tel que
$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$.

3. $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AM}$
$\overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.

Exercice n°6

1. $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.
2. $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
3. $\vec{w} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}$
$\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$
4. $\vec{x} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$
$\vec{x} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB}$
$\vec{x} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$
$\vec{x} = \overrightarrow{AD}$.
5. $\vec{y} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$
$\vec{y} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$
$\vec{y} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$
$\vec{y} = \overrightarrow{CB}$.
6. $\vec{z} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$
$\vec{z} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}$
$\vec{z} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$
$\vec{z} = 3\overrightarrow{AB}$.

Exercice n°7

1.

$$\begin{aligned}\vec{u} - 2\left(\vec{u} + \vec{v}\right) - \frac{1}{3}\vec{v} &= \vec{u} - 2\vec{u} - 2\vec{v} - \frac{1}{3}\vec{v}\\ &= -\vec{u} - \frac{6}{3}\vec{v} - \frac{1}{3}\vec{v}\\ &= -\vec{u} - \frac{7}{3}\vec{v}.\end{aligned}$$

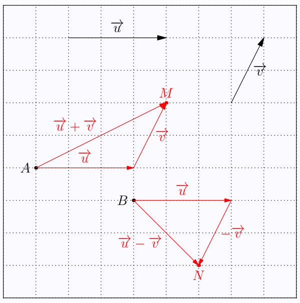
2.

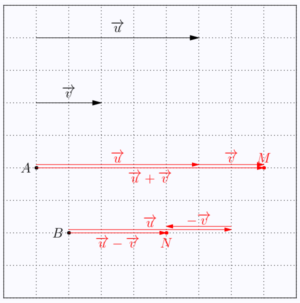
$$\begin{aligned}-\frac{2}{5}\vec{u} + \vec{u} - \frac{1}{4}\left(\vec{u} - \vec{v}\right) &= -\frac{2}{5}\vec{u} + \vec{u} - \frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v}\\ &= \left(-\frac{2}{5} + 1 - \frac{1}{4}\right)\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v}\\ &= \frac{7}{20}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v}.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\vec{u} - \vec{v}\right) - \frac{1}{3}\left(\vec{u} + \vec{v}\right)\\ &= \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v}\\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\vec{u} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\vec{v}\\ &= \frac{1}{6}\vec{u} - \frac{5}{6}\vec{v}.\end{aligned}$$

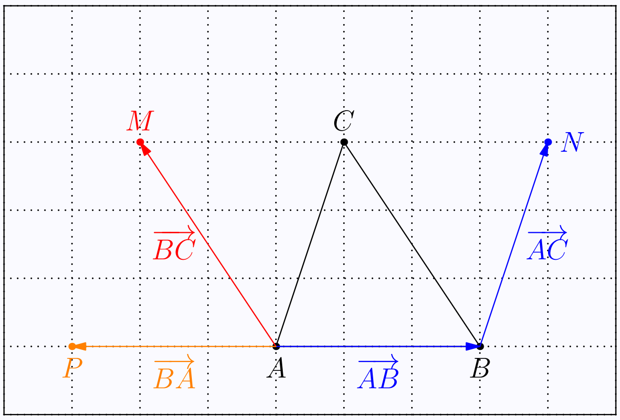
Exercice n°8





Exercice n°9

Dans la figure ci-dessous les points M, N et P tels que :
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$.

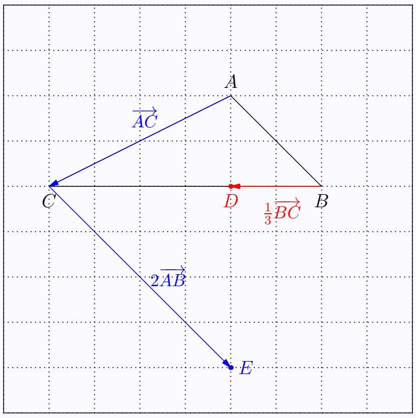


Exercice n°10

— $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BP}$.
— $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC}$.
— $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CP}$.
— $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB}$.
— $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CM}$.
— $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CB}$.

Exercice n°11

1.



2. Pour montrer que les points A , D et E sont alignés, il suffit de prouver que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.
En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

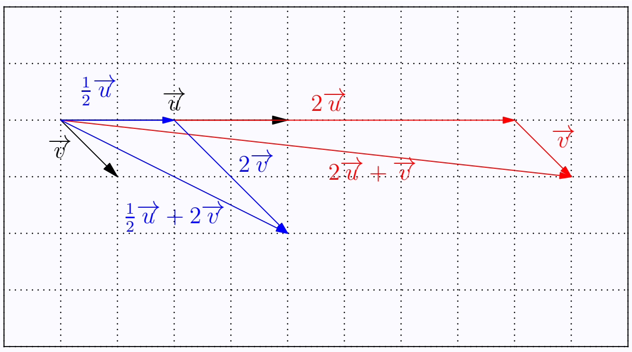
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\\ &= \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)\\ &= \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\\ &= \tfrac{3}{3}\overrightarrow{AB} - \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\\ &= \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Or, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}$. Ainsi,

$$\overrightarrow{AD} = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AE}.$$

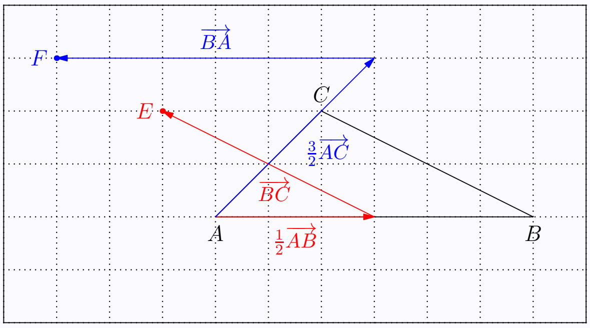
Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont bien colinéaires.

Exercice n°12



Exercice n°13

1.

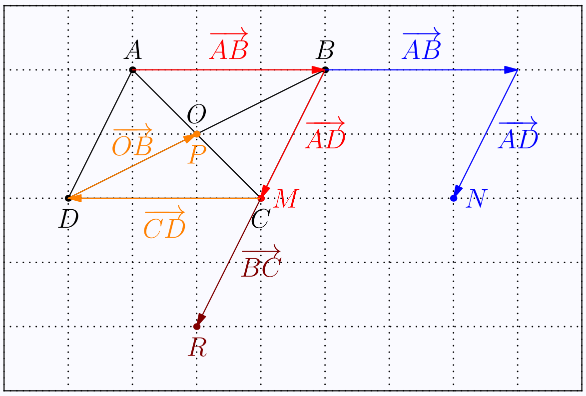


2. En décomposant et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

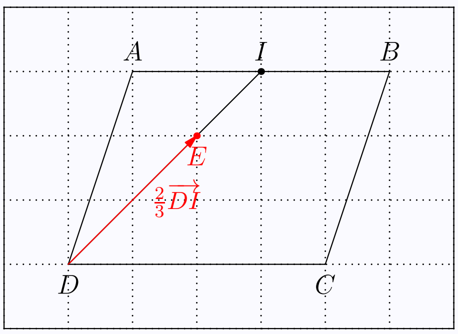
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} \\
&= -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} \\
&= -\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \tfrac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} \\
&= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \tfrac{2}{2}\overrightarrow{BA} + \tfrac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \\
&= \tfrac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \tfrac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \\
&= \tfrac{3}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) - \overrightarrow{BC} \\
&= \tfrac{3}{2}\overrightarrow{BC} - \tfrac{2}{2}\overrightarrow{BC} \\
&= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}.
\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc colinéaires, par conséquent les droites (EF) et (BC) sont bel et bien parallèles.

Exercice n°14



Exercice n°15



1. Voir la figure.
2. Pour montrer que les points A , C et E sont alignés, il suffit de prouver que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
En décomposant et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} \\
&= \overrightarrow{AD} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{DI} \\
&= \overrightarrow{AD} + \tfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}\right) \\
&= \overrightarrow{AD} - \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}.
\end{aligned}$$

Or, $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AE} &= \tfrac{3}{3}\overrightarrow{AD} - \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \tfrac{2}{3} \times \tfrac{1}{2}\overrightarrow{DC} \\
&= \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{DC} \\
&= \tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) \\
&= \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}.
\end{aligned}$$

Par conséquent les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont bel et bien colinéaires.