6 Corrigés

Série d'exercices **Classe : Seconde** **Lycée : Evariste Galois**

Exercice n°1

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} = 5\vec{i} + 7\vec{j}$
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} = -4\vec{i} + 6\vec{j}$
3. $\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\\sqrt{5}\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} = -\frac{3}{2}\vec{i} + \sqrt{5}\vec{j}$
4. $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} = -3\vec{j}$

Exercice n°2

$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\13\end{pmatrix}$ $\quad 2\vec{u}-3\vec{v}\begin{pmatrix}-7\\-4\end{pmatrix}$

Exercice n°3

$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$; $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}$; $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{5}{4}\end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}\vec{u} + \vec{w}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$; $3\vec{u} - 2\vec{v}\begin{pmatrix}-14\\1\end{pmatrix}$; $4\vec{w} - \frac{1}{2}\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-\frac{7}{2}\end{pmatrix}$

Exercice n°4

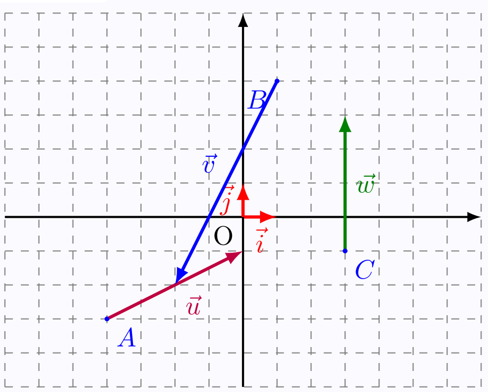
$\vec{u}\begin{pmatrix}9\\-3\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$; $\vec{t}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$.

Exercice n°5

Sachant que le plan est muni d'une base orthonormée, calculer la norme de $\vec{u}$ dans les cas suivants :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$ $\quad$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\3\end{pmatrix}$ $\quad$ c) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\-1\end{pmatrix}$

Exercice n°6



Exercice n°7

a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{100} = 10.$

b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2+3^2} = \sqrt{2+9} = \sqrt{11}.$

c) $\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+(-1)^2} = \sqrt{\frac{9}{16}+1} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}.$

Exercice n°8

a) $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}2 & 8\\-1 & -4\end{vmatrix} = 2\times(-4)-(-1)\times 8 = 0,$

donc les deux vecteurs sont colinéaires.

b) $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{2}{3}\\3 & 4\end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\times 4 - 3\times\left(-\frac{2}{3}\right) = 0,$

donc les deux vecteurs sont colinéaires.

c) $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}-1 & 3\\0 & 4\end{vmatrix} = -1\times 4 - 0\times 3 = -4 \neq 0,$

donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

d) $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}\sqrt{3} & 3\\-1 & \sqrt{3}\end{vmatrix} = \sqrt{3}\times\sqrt{3}-(-1)\times 3 = 6,$

donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

e) $\det(\vec{u},\vec{v})$

$= \begin{vmatrix}\sqrt{2} & -3\\-2 & 3\sqrt{2}\end{vmatrix}$

$= \sqrt{2}\times 3\sqrt{2} - (-2)\times(-3) = 0$, donc les deux vecteurs sont colinéaires.

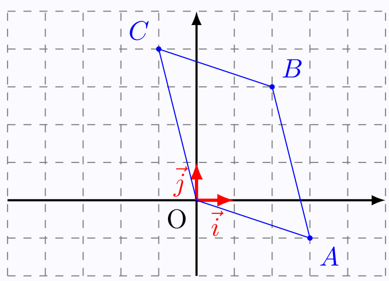
f) $\det(\vec{u},\vec{v})$

$= \begin{vmatrix}\sqrt{3}-2 & 1\\1 & \sqrt{3}+2\end{vmatrix}$

$= (\sqrt{3}-2)\times(\sqrt{3}+2) - 1\times 1 = (\sqrt{3})^2 - 2^2 - 1$

$= 3-4-1 = -2 \neq 0$, donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Exercice n°9

1. 

2. $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.

3. $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{CB}$ ont les mêmes coordonnées, ils sont donc égaux. On peut en déduire que $OABC$ est un parallélogramme.

Exercice n°10

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$

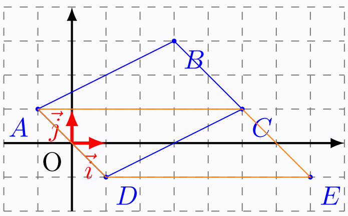
c) $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ d) $3\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}$

e) $-2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-20\\4\end{pmatrix}$

f) $2\,\overrightarrow{DB}-\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{13}{2}\\-\frac{19}{2}\end{pmatrix}$

Exercice n°11

a) Dans le repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ci-dessous, placer les points $A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$.



b) $ABCD$ parallélogramme

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}x_D+1\\y_D-1\end{pmatrix}=\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_D+1=2\\y_D-1=-2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_D=1\\y_D=-1\end{cases}.$$

c) $ADEC$ parallélogramme

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}=\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}x_E-5\\y_E-1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_E-5=2\\y_E-1=-2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_E=7\\y_E=-1\end{cases}.$$

Déterminer les coordonnées du point E tel que $ADEC$ soit un parallélogramme.

Exercice n°12

Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $A\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$.

1. $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x_M-1\\y_M-4\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_M-1=3\\y_M-4=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_M=4\\y_M=5\end{cases}.$$

2. $N\begin{pmatrix}\dfrac{x_A+x_C}{2}\\\dfrac{y_A+y_C}{2}\end{pmatrix}\Leftrightarrow N\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

3. $2\,\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}+3\,\overrightarrow{CP}\begin{pmatrix}3(x_P-4)\\3(y_P+5)\end{pmatrix}=\vec{0}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}6+3x_P-12=0\\2+3y_P+15=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x_P=6\\3y_P=-17\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_P=2\\y_P=-\frac{17}{3}\end{cases}.$$

Exercice n°13

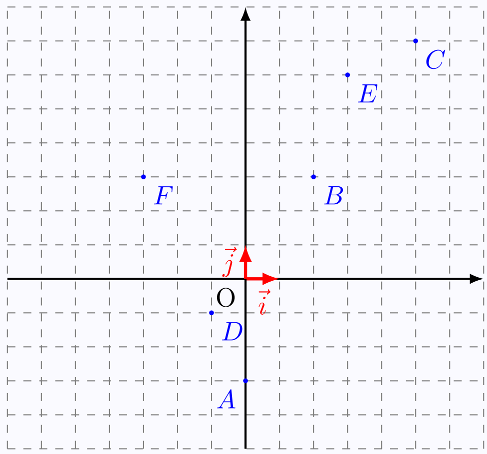
a) $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}4&12\\1&3\end{vmatrix}=4\times3-1\times12=0$, les points A, B et C sont donc alignés.

b) $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}1&\frac{3}{2}\\2&3\end{vmatrix}=1\times3-2\times\frac{3}{2}=0$, les points A, B et C sont donc alignés.

c) $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}\frac{9}{2}&9\\-3&-6\end{vmatrix}=\frac{9}{2}\times(-6)-(-3)\times9=0$, les points A, B et C sont donc alignés.

Exercice n°14

1. Dans le repère orthonormé ci-dessous, placer les points $A\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$.



$$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}x_E-2\\y_E-3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\times2\\\frac{1}{2}\times6\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_E-2=1\\y_E-3=3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x_E=3\\y_E=6\end{cases}.$$

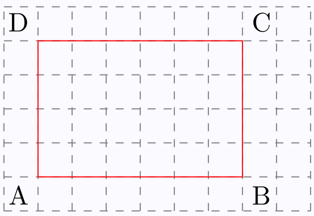
$$\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}x_F\\y_F+3\end{pmatrix}=3\,\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}3\times(-1)\\3\times2\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_F=-3\\y_F+3=6\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x_F=-3\\y_F=3\end{cases}.$$

2. $\det(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CF}) = \begin{vmatrix} -2 & -8 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$
   $= -2 \times (-4) - (-1) \times (-8) = 0.$
   Ainsi, les points C, E et F sont alignés.
3. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
   $AB = \sqrt{(2-0)^2 + (3-(-3))^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40}.$
   $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$
   $AC = \sqrt{(5-0)^2 + (7-(-3))^2} = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125}.$
   $BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2}$
   $BD = \sqrt{(-1-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5.$

Exercice n°15

Soit $ABCD$ un rectangle, I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[AD]$, M le point tel que $\overrightarrow{JM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et N le point tel que $\overrightarrow{IN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.



On se place dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$.

1. $I\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$; $J\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $M\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $N\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

2. $\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 0$

   Donc A , M et N sont bien alignés.

   $\det(\overrightarrow{DM},\overrightarrow{BN}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

   Les droites (DM) et (BN) sont bien parallèles.