Corrigés

Série d'exercices — Classe : Seconde — Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

Compléter les tableaux de signes suivants.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$3x+2$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$-3x+2$		$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$4x$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-2x$		$+$	0	$-$	

Exercice n°2

Compléter les tableaux de signes suivants.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{7}$		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$7x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$5-4x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(7x+1)(5-4x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$-\frac{9}{2}$		4		$+\infty$
$4-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{2}{3}x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(4-x)\left(\frac{2}{3}x+3\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1-2x$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{3-x}{1-2x}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$\sqrt{2}+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$6x-4$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{\sqrt{2}+x}{6x-4}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$8-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{-x}{8-2x}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$1-5x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{-x}{1-5x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Exercice n°3

1. $S =]-\infty;-2[$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation $A(x) > 0$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$A(x)$		$+$	0	$-$	

2. $S = \left[\frac{1}{3};+\infty\right[$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation $A(x) \geqslant 0$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	

3. $S =]-\infty;-5[\cup \left]\frac{5}{2};+\infty\right[$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation $A(x) < 0$.

x	$-\infty$		-5		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. $S = \left]-\infty;-\frac{2}{3}\right] \cup [0;+\infty[$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation $A(x) \geqslant 0$.

x	$-\infty$		$\frac{-2}{3}$		0		$+\infty$
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

5. $S = \left]-\infty;-\sqrt{5}\right[\cup \left[0;\frac{5}{4}\right[$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation $A(x) \leqslant 0$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		0		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$A(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Exercice n°4

1. $S = \left[-1;\frac{3}{2}\right]$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation $(3-2x)(x+1) \geqslant 0$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$3-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(3-2x)(x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. $S =]-\infty;0[\cup]4;+\infty[$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation $4x(4-x) < 0$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$4x$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$4x(4-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice n°5

L'affirmation suivante « Si $x^2 > 1$ alors on a forcément $x > 1$ » est fausse. En effet, $(-1)^2 = 4 > 1$ alors que $x = -1 < 1$.

Exercice n°6

a) $x-2\leqslant 0 \Leftrightarrow x\leqslant 2$. $S=\left]-\infty\,;\,2\right]$.
b) $x+4>0 \Leftrightarrow x>-4$. $S=\left]-4\,;\,+\infty\right[$.
c) $2x+7>0 \Leftrightarrow 2x>-7 \Leftrightarrow x>-\frac{7}{2}$. $S=\left]-\frac{7}{2}\,;\,+\infty\right[$.
d) $\frac{1-3x}{4}\geqslant 0 \Leftrightarrow 1-3x\geqslant 0 \Leftrightarrow 1\geqslant 3x \Leftrightarrow \frac{1}{3}\geqslant x$. $S=\left]-\infty\,;\,\frac{1}{3}\right]$.
e) $3x-3<1-2x \Leftrightarrow 3x+2x<1+3 \Leftrightarrow 5x<4 \Leftrightarrow x<\frac{4}{5}$. $S=\left]-\infty\,;\,\frac{4}{5}\right[$.
f) $2(x-3)\geqslant 8-3x \Leftrightarrow 2x-6\geqslant 8-3x \Leftrightarrow 2x+3x\geqslant 8+6 \Leftrightarrow 5x\geqslant 14 \Leftrightarrow x\geqslant \frac{14}{5}$. $S=\left[\frac{14}{5}\,;\,+\infty\right[$.
g) $2(x+1)<3+2x \Leftrightarrow 2x+2<3+2x \Leftrightarrow 2x-2x<3-2 \Leftrightarrow 0<1$. C'est vrai pour tout x, donc $S=\mathbb{R}$.
h) $\frac{x-2}{3}-\frac{1-x}{2}\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2}{2}\times\frac{(x-2)}{3}-\frac{3}{3}\times\frac{(1-x)}{2}\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2x-4-3+3x}{6}\geqslant 0$
$\Leftrightarrow \frac{5x-7}{6}\geqslant 0 \Leftrightarrow 5x-7\geqslant 0 \Leftrightarrow 5x\geqslant 7 \Leftrightarrow x\geqslant \frac{7}{5}$.
$S=\left[\frac{7}{5}\,;\,+\infty\right[$.
i) $\frac{x}{2}-\frac{4-x}{4}>5 \Leftrightarrow \frac{2}{2}\times\frac{x}{2}-\frac{(4-x)}{4}>5 \Leftrightarrow \frac{2x-4+x}{4}>5 \Leftrightarrow \frac{3x-4}{4}>5$
$\Leftrightarrow 3x-4>20 \Leftrightarrow 3x>24 \Leftrightarrow x>\frac{24}{3} \Leftrightarrow x>8$.
$S=\left]8\,;\,+\infty\right[$.

Exercice n°7

a) Signe de $3x-4$.

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x-4$		$-$	0	$+$	

b) Signe de $\frac{2}{3}x+5$.

x	$-\infty$		$-\frac{15}{2}$		$+\infty$
$\frac{2}{3}x+5$		$-$	0	$+$	

c) Signe de $-3x+7$.

x	$-\infty$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$-3x+7$		$+$	0	$-$	

d) Signe de $8-\frac{3}{2}x$.

x	$-\infty$		$\frac{16}{3}$		$+\infty$
$8-\frac{3}{2}x$		$+$	0	$-$	

Exercice n°8

a) Signe de $(x-4)(x-3)$.

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-4)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) Signe de $(1-2x)(x+2)$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(1-2x)(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c) signe de $5x(3x-2)(x+5)$.

x	$-\infty$		-5		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$5x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$5x(3x-2)(x+5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

d) Signe de x^2-9.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$x+3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-9		$+$	0	$-$	0	$+$	

e) Signe de $\left(1-x^2\right)(x-4)=(1-x)(1+x)(x-4)$.

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-4$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\left(1-x^2\right)(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

f) Signe de $\frac{3-x}{2+x}$.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{3-x}{2+x}$		$-$	0	$+$	0	$-$	

g) Signe de $\frac{4-2x}{x+3}$.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$4-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{4-2x}{x+3}$		$-$	0	$+$	0	$-$	

h) Signe de $\frac{x(x+1)}{3x-2}$.

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{x(x+1)}{3x-2}$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Exercice n°9

a) $S=\left]-\infty;0\right]\cup\left[1;+\infty\right[$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation $x(x-1)\geqslant 0$. En effet,

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $S=\left]-\infty;\frac{1}{7}\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation $(2x-3)(1-7x)<0$. En effet,

x	$-\infty$		$\frac{1}{7}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$1-7x$		$+$	0	$-$		$-$	
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x-3)(1-7x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c) $S=\left]-4;4\right[$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation $(x-4)(x+4)<0$. En effet,

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-16		$+$	0	$-$	0	$+$	

d) $S=\left]-\frac{3}{2};-1\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation $\left(4x^2-9\right)(x+1)<0$. En effet,

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\left(4x^2-9\right)(x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

e) $S=\left]-4;3\right[$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{3-x}{x+4}>0$. En effet,

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{3-x}{x+4}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

f) $S=\left]-\infty;1\right]\cup\left[\frac{5}{2};+\infty\right[$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{5-2x}{1-x}\geqslant 0$. En effet,

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$5-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$\dfrac{5-2x}{1-x}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

g) $S=[-1;0]\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{x(x+1)}{3-2x}\leqslant 0$. En effet,

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$3-2x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{x(x+1)}{3-2x}$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

h) $S=\left]-\infty;-3\right[\cup\left]1;3\right[$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{x^2-9}{1-x}>0$. En effet,

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{x^2-9}{1-x}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

i) $\dfrac{2x+1}{x+2}\leqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x+2}-1\leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x+2}-\dfrac{(x+2)}{x+2}\leqslant 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{2x+1-x-2}{x+2}\leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+2}\leqslant 0$

$S=[-2;3]$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{2x+1}{x+2}\leqslant 1$. En effet,

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x-1}{x+2}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

j) $\dfrac{1-3x}{1-x}\geqslant 2 \Leftrightarrow \dfrac{1-3x}{1-x}-2\geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-3x}{1-x}-2\times\dfrac{1-x}{1-x}\geqslant 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{1-3x-2(1-x)}{1-x}\geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-3x-2+2x)}{1-x}\geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x-1}{1-x}\geqslant 0.$

$S=\left]-\infty;-1\right]\cup\left]1;+\infty\right[$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{1-3x}{1-x}\geqslant 2$. En effet,

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-x-1$		$+$	0	$-$		$-$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{-x-1}{1-x}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

k) $\dfrac{x+5}{x-1}\leqslant\dfrac{x-3}{x+2} \Leftrightarrow \dfrac{x+5}{x-1}-\dfrac{x-3}{x+2}\leqslant 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{(x+5)}{(x-1)}\times\dfrac{(x+2)}{(x+2)}-\dfrac{(x-3)}{(x+2)}\times\dfrac{(x-1)}{(x-1)}\leqslant 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+5x+2x+10-x^2+x+3x-3}{(x-1)(x+2)}\leqslant 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{11x+7}{(x-1)(x+2)}\leqslant 0.$

$S=\left]-\infty;-2\right]\cup\left[-\dfrac{-7}{11};1\right[$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{x+5}{x-1}\leqslant\dfrac{x-3}{x+2}$. En effet,

x	$-\infty$		-2		$-\frac{7}{11}$		1		$+\infty$
$11x+7$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{11x+7}{(x-1)(x+2)}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

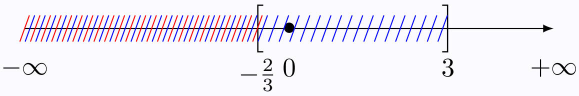
l) $\dfrac{x+3}{x^2-1}\geqslant\dfrac{3}{x-1} \Leftrightarrow \dfrac{x+3}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{3}{x-1}\geqslant 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{x+3}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{3}{(x-1)}\times\dfrac{(x+1)}{(x+1)}\geqslant 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{x+3-3x+3}{(x-1)(x+1)}\geqslant 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{-2x}{(x-1)(x+1)}\geqslant 0.$

$S=\left]-\infty;-1\right]\cup[0;1]$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{x+3}{x^2-1}\geqslant\dfrac{3}{x-1}$. En effet,

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$-2x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{-2x}{(x-1)(x+1)}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

Exercice n°10

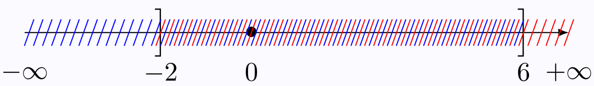
$$\begin{cases} 2x-3>5x-1 \\ x+4 \geqslant 3x-2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3+1>5x-2x \\ 4+2 \geqslant 3x-x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2>3x \\ 6 \geqslant 2x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3}>x \\ 3 \geqslant x \end{cases}.$$



Ainsi, $S = \left]-\infty\,;\, -\frac{2}{3}\right[$.

Exercice n°11

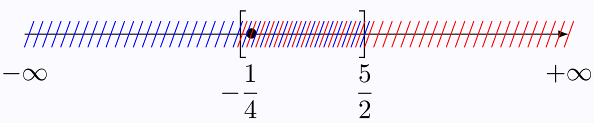
$$\begin{cases} 4x-3<5x-1 \\ 3x+4 \geqslant 4x-2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3+1<5x-4x \\ 4+2 \geqslant 4x-3x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2<x \\ 6 \geqslant x \end{cases}.$$



Ainsi, $S =]-2\,;\, 6]$.

Exercice n°12

$$\begin{cases} 4x-3 \leq 8x-2 \\ 3x+4 \geq 7x-6 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3+2 \leq 8x-4x \\ 4+6 \geq 7x-3x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 4x \\ 10 \geq 4x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{4} \leq x \\ \dfrac{5}{2} \geq x \end{cases}.$$



Ainsi, $S = \left[-\dfrac{1}{4}\,;\, \dfrac{5}{2}\right]$.

Exercice n°13

Déterminer le signe des expressions suivantes.

$A(x) = (x-5)(x-12)$.

$B(x) = (x-3)(2x+5)$.

$C(x) = (x+6)(2x-8)(3x-9)$.

$D(x) = (x-3)(-2x+6)$.

$E(x) = \dfrac{x+6}{2x-16}$.

$F(x) = \dfrac{2x-3}{-2x+6}$.

$G(x) = (2x+3)(x-5)-(3x+5)(x-5)$.

$H(x) = \dfrac{3}{x-2} - \dfrac{2}{x-3}$.

Exercice n°14

Dans une entreprise, la recette, en euros, obtenu pour la vente journalière de x objets est donnée par la fonction f définie sur $[0;50]$ par l'expression :

$$f(x) = -x^2+52x-480\,.$$

a) Montrer que, pour tout $x \in [0;50]$, $f(x) = -(x-26)^2+196$.

b) Etudier le sens de variation de f sur $[0;26]$ puis sur $[26;50]$.

c) En déduire le bénéfice maximum que l'entreprise peut réaliser et la quantité d'objets à vendre pour l'atteindre.