Corrigés

Série d'exercices — Classe : Seconde — Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

a. $5x - 3 > 6$
$5x - 3 + 3 > 6 + 3$
$5x > 9$
$x > \frac{9}{5}$.
Les solutions de l'inéquation sont toutes les valeurs supérieures strictement à $\frac{9}{5}$.

b. $3x + 2 \leqslant -7$
$3x + 2 - 2 \leqslant -7 - 2$
$3x \leqslant -9$
$x \leqslant \frac{-9}{3}$
$x \leqslant -3$.
Les solutions de l'inéquation sont toutes les valeurs inférieures ou égales à -3.

c. $-5x + 10 < 12$
$-5x + 10 - 10 < 12 - 10$
$-5x < 2$
$x > \frac{2}{-5}$
Les solutions de l'inéquation sont toutes les valeurs supérieures strictement à $\frac{2}{-5}$.

d. $-6x + 11 \geqslant 7$
$-6x + 11 - 11 \geqslant 7 - 11$
$-6x \geqslant -4$
$x \leqslant \frac{-4}{-6}$
Les solutions de l'inéquation sont toutes les valeurs inférieures ou égales à $\frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$.

Exercice n°2

a. $x - 1 < 5 - 5x$
$x - 1 + 1 < 5 - 5x + 1$
$x + 5x < 6 - 5x + 5x$
$6x < 6$
$x < 1$.
Les solutions de l'inéquation sont toutes les valeurs inférieures strictement à 1.

b. $4x + 3 \leqslant x - 2$
$4x + 3 - 3 \leqslant x - 2 - 3$
$4x - x \leqslant x - 5 - x$
$3x \leqslant -5$
$x \leqslant \frac{-5}{3}$
Les solutions de l'inéquation sont toutes les valeurs inférieures ou égales à $\frac{-5}{3}$.

c. $-x + 40 > 10 + x$
$-x - x > 10 - 40$
$-2x > -30$
$x < \frac{-30}{-2}$
Les solutions de l'inéquation sont toutes les valeurs inférieures strictement à 15.

d. $-6x + 11 \geqslant 4x$
$11 \geqslant 4x + 6x$
$11 \geqslant 10x$
$1{,}1 \geqslant x$
Les solutions de l'inéquation sont toutes les valeurs supérieures ou égales à 1,1.

Exercice n°3

L'entreprise « Vitlivré » propose une somme de 3,20 € par kilomètre parcouru, tandis que l'entreprise « Rapido » propose un forfait de 180 € puis une somme de 2 € par kilomètre parcouru.

1. Pour de 100 kilomètres.
   L'entreprise « Vitlivré » propose :
   $3{,}20 \times 100 = 320$€.
   L'entreprise « Rapido » propose :
   $2 \times 100 + 180 = 380$€.
   Il faut donc choisir « Vitlivré ».
2. Soit x le nombre de kilomètres parcourus.
   L'entreprise « Vitlivré » propose : $3{,}20x$.
   L'entreprise « Rapido » propose : $2x + 180$.
   Dire que l'offre de l'entreprise « Rapido » est plus intéressante revient à dire que,

$$\begin{aligned} 2x + 180 &< 3{,}20x \\ 180 &< 3{,}20x - 2x \\ 180 &< 1{,}2x \\ \frac{180}{1{,}2} &< x \\ 150 &< x. \end{aligned}$$

Donc, au delà de 150 kilomètres l'entreprise « Rapido » est plus intéressante.

Exercice n°4

1. si $1 \leqslant x \leqslant 3$, alors
   $-6 \leqslant -2x \leqslant -2$ donc $-5 \leqslant -2x + 1 \leqslant -1$.
2. si $-4 < x < -\dfrac{1}{2}$, alors
   $-12 < 3x < -\dfrac{3}{2}$ donc $-13 < 3x - 1 < -\dfrac{5}{2}$.
3. si $-2 < x < \sqrt{2}$, alors
   $-\sqrt{2} < -x < 2$ donc $2 - \sqrt{2} < 2 - x < 4$.
4. si $-5 \leqslant x \leqslant 2$, alors
   $-2 \leqslant -x \leqslant 5$ donc $2 \leqslant 4 - x \leqslant 9$.
5. si $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3$, alors
   $\dfrac{1}{4} \leqslant x^2 \leqslant 9$ donc $-\dfrac{15}{4} \leqslant x^2 - 4 \leqslant 5$.
6. si $\dfrac{3}{2} \leqslant x \leqslant 7$, alors
   $\dfrac{1}{7} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{2}{3}$ donc $\dfrac{2}{7} \leqslant \dfrac{2}{x} \leqslant \dfrac{4}{3}$.
7. si $-6 \leqslant 12x \leqslant 2$, alors
   $-\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{6}$.
8. si $-4 < 3x - 1 < 8$, alors
   $-3 < 3x < 9$ donc $-1 < x < 3$.
9. si $-\dfrac{3}{2} \leqslant 1 - 2x \leqslant \dfrac{5}{4}$, alors
   $-\dfrac{5}{2} \leqslant -2x \leqslant \dfrac{1}{4}$ donc $-\dfrac{1}{8} \leqslant x \leqslant \dfrac{5}{4}$.
10. si $-10 \leqslant 7 - x \leqslant 1$, alors
    $-17 \leqslant -x \leqslant -6$ donc $6 \leqslant x \leqslant 17$.

Exercice n°5

1. $P_1 = 7{,}5x$ et $P_2 = 5{,}25x + 27$.
2. L'abonnement est plus intéressant quand $P_2 < P_1$, autrement dit quand :

$$\begin{array}{rcl} 5{,}25x + 27 & < & 7{,}5x \\ 27 & < & 7{,}5x - 5{,}25x \\ 27 & < & 2{,}25x \\ \dfrac{27}{2{,}25} & < & x \\ 12 & < & x. \end{array}$$

Donc, au delà de 12 places l'abonnement est plus intéressant.

Exercice n°6

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre de séances	10	18	25
Tarif A	80	144	200
Tarif B	90	130	165
Tarif C	160	160	160

2. Pour 10 séances, le tarif le plus avantageux est le tarif A.
   On appelle x le nombre de séances.
3. Tarif A : $8x$.
4. Tarif B : $5x + 40$.
5. Tarif C : 160.
6. Dire que le tarif B est plus avantageux que le tarif revient à dire :

$$\begin{array}{rcl} 5x + 40 & < & 8x \\ 40 & < & 8x - 5x \\ 40 & < & 3x \\ \dfrac{40}{3} & < & x \\ 13{,}3 & < & x. \end{array}$$

Donc, au delà de 14 séances le tarif B est plus avantageux que le tarif A.

7. Dire que le tarif C est plus avantageux que le tarif B revient à dire :

$$\begin{array}{rcl} 160 & < & 5x + 40 \\ 160 - 40 & < & 5x \\ 120 & < & 5x \\ \dfrac{120}{5} & < & x \\ 24 & < & x. \end{array}$$

Donc, au delà de 24 séances le tarif C est plus avantageux que le tarif B.

Exercice n°7

$1 < -x < 4$ et $2 < -y < 3$ donc $2 < xy < 12$.

$1 < -x < 4$ et $\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{-y} < \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1}{3} < \dfrac{x}{y} < 2$.

Exercice n°8

a) $[3\,;\,4]$.
b) $]4\,;\,7[$.
c) $]-2\,;\,5]$.
d) $\left[-\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$.
e) $\left]\sqrt{2}\,;\,\sqrt{3}\right]$.
f) $]-\infty\,;\,2]$.
g) $\left[-\dfrac{1}{4}\,;\,+\infty\right[$.
h) $\left]-\infty\,;\,\sqrt{3}\right[$.

Exercice n°9

Cela revient à déterminer l'intersection des deux intervalles, ce qui donne $[0{,}68\,;\,0{,}69]$.

Exercice n°10

a) $[2\,;\,4]$.
b) $]4\,;\,6]$.
c) $\{4\}$.
d) $\varnothing$.
e) $[3\,;\,5]$.
f) $\left]\dfrac{1}{2}\,;\,2\right[$.
g) $\left]-\dfrac{7}{4}\,;\,1\right[$.
h) $\varnothing$.
i) $[3\,;\,10]$.
j) $[2\,;\,+\infty[$.
k) $]-7\,;\,14[$.
l) $]7\,;\,12]$.

Exercice n°11

a et b étant deux réels strictement positifs.

1. $\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) - \sqrt{a+b}\right] \times \left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) + \sqrt{a+b}\right]$
   $= \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 - \left(\sqrt{a+b}\right)^2$
   $= \sqrt{a}^2 + 2 \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} + \sqrt{b}^2 - (a+b)$
   $= a + 2 \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} + b - a - b$
   $= 2 \times \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
   Le résultat est positif car on a un produit de racines et il ne peut pas être nul car $a > 0$ et $b > 0$.
2. $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) + \sqrt{a+b} > 0$
   et

$$\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) - \sqrt{a+b}\right] \times \left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) + \sqrt{a+b}\right] > 0$$

aussi d'après la question précédente.
On en déduit que

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) - \sqrt{a+b} > 0$$

et donc que

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{a+b}.$$

Exercice n°12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = |2x-4| - |3x+1|\,.$$

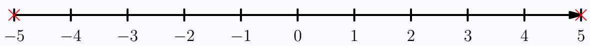
$f(0) = |0-4| - |0+1| = |-4| - |1| = 4 - 1 = 3$.
3 est l'image de 0 par la fonction f.
$f(-2) = |-4-4| - |-6+1| = |-8| - |-5| = 8 - 5 = 3$.
3 est l'image de -2 par la fonction f.
$f(8) = |16-4| - |24+1| = |12| - |25| = 12 - 25 = -13$.
-13 est l'image de 8 par la fonction f.

Exercice n°13

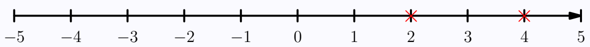
$\sqrt{2}$; $\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{3}{4}$; $4-\sqrt{2}$; $-\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}$; $2-\dfrac{\pi}{4}$; $\dfrac{2\pi}{3}$; $-\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Exercice n°14

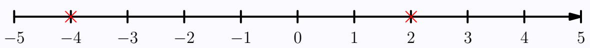
1. $|x| = 5 \Leftrightarrow d(x{,}0) = 5$.



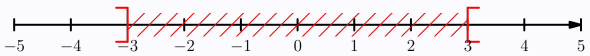
2. $|x-3| = 1 \Leftrightarrow d(x{,}3) = 1$.



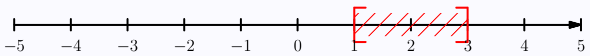
3. $|x+1| = 3 \Leftrightarrow d(x,-1) = 3$.



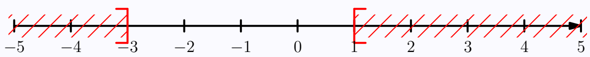
4. $|x| < 3 \Leftrightarrow d(x{,}0) < 3$



5. $|x-2| \leqslant 1 \Leftrightarrow d(x{,}2) \leqslant 1$



6. $|x+1| \geqslant 2 \Leftrightarrow d(x,-1) \geqslant 2$



Exercice n°15

On considère deux réels x et y tels que $1 \leqslant x \leqslant 3$ et $\dfrac{1}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{3}{2}$.

1. $\dfrac{3}{2} \leqslant x+y \leqslant \dfrac{9}{2}$;
   $\dfrac{1}{2} \leqslant xy \leqslant \dfrac{9}{2}$;
   $2 \leqslant x+2y \leqslant 6$; $-\dfrac{27}{2} \leqslant -3xy \leqslant -\dfrac{3}{2}$.
2. $-\dfrac{3}{2} \leqslant -y \leqslant -\dfrac{1}{2}$;
   $-\dfrac{1}{2} \leqslant x-y \leqslant \dfrac{5}{2}$.
3. $\dfrac{2}{3} \leqslant \dfrac{1}{y} \leqslant 2$;
   $\dfrac{2}{3} \leqslant \dfrac{x}{y} \leqslant 6$.

Exercice n°16

On considère deux réels x et y tels que $-2 < x < -1$ et $3 < y < 6$.

1. $1 < -x < 2$;
   $3 < -xy < 12$;
   $-12 < xy < 3$.
2. $\dfrac{1}{6} < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{3}$;
   $\dfrac{1}{6} < \dfrac{-x}{y} < \dfrac{2}{3}$;
   $-\dfrac{2}{3} < \dfrac{x}{y} < -\dfrac{1}{6}$.