4

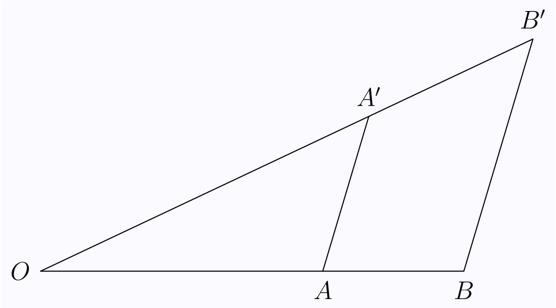
Corriges

Géométrie plane & Repérage

Série d'exercices — **Classe : Seconde** — **Lycée : Evariste Galois**

Exercice n°1

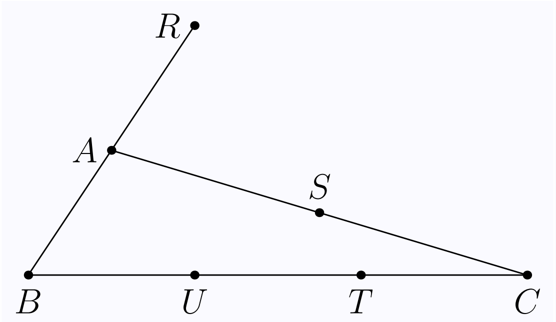
Dans la figure ci-dessous.



On sait que :
Les droites (AB) et $(A'B')$ sont sécantes en O.
Les droites (AA') et (BB') sont parallèles.
Alors d'après le théorème de Thalès :
$\frac{OA'}{OB'} = \frac{AA'}{BB'} = \frac{AA'}{BB'}$.
Ainsi,
$\frac{OA'}{OA'+9} = \frac{8}{12} \Leftrightarrow 12\,OA' = 8\,OA' + 72 \Leftrightarrow 4\,OA' = 72$.
On en déduit alors que, $OA' = 18$.

Exercice n°2

Dans la figure ci-dessous.

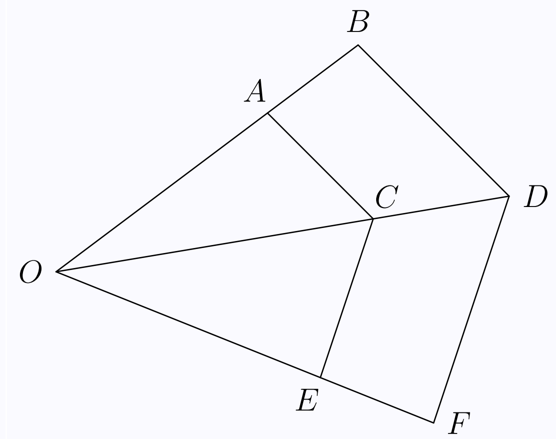


Les points B ; U ; et T et B ; A ; R sont alignés dans le même ordre.
Vérifions l'égalité : $\frac{BA}{BR} = \frac{BU}{BT}$.
D'une part, $\frac{BA}{BR} = \frac{1}{2}$. Car, A est le milieu de $[BR]$
D'autre part, $\frac{BU}{BT} = \frac{1}{2}$. Car, $BU = UT = TC$.
L'égalité est vérifiée, alors d'après la réciproque du théorème de Thalès $(AU)//(RT)$. $(*)$

Les points C ; S ; et A et C ; T ; U sont alignés dans le même ordre.
Vérifions l'égalité : $\frac{CS}{CA} = \frac{CT}{CU}$.
D'une part, $\frac{CS}{CA} = \frac{1}{2}$. Car, S est le milieu de $[AC]$
D'autre part, $\frac{CT}{CU} = \frac{1}{2}$. Car, $BU = UT = TC$.
L'égalité est vérifiée, alors d'après le 2e théorème (la réciproque du théorème) de Thalès $(ST)//(AU)$. $(**)$
$(*)$ et $(**)$ impliquent que $(ST)//(RT)$.
Autrement dit, les points R, S et T sont alignés.

Exercice n°3

Dans la figure ci-dessous.

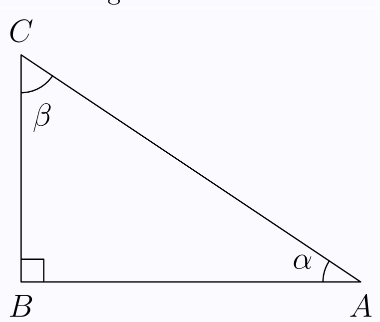


D'une part, on sait que :
Les droites (AB) et (CD) sont sécantes en O.
Les droites (AC) et (BD) sont parallèles.
Alors d'après le théorème de Thalès :
$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{DB}$. $(*)$
D'autre part, on sait que :
Les droites (EF) et (CD) sont sécantes en O.
Les droites (EC) et (FD) sont parallèles.
Alors d'après le théorème de Thalès :
$\frac{OC}{OD} = \frac{OE}{OF} = \frac{CE}{DF}$. $(**)$

$(*)$ et $(**)$ impliquent que $\frac{OA}{OB} = \frac{OE}{OF}$ et donc que, d'après le 2e théorème de Thalès, $(AE)//(BF)$.

Exercice n°4

Dans la figure ci-dessous.



- ABC est un triangle rectangle en B, alors $\tan(\alpha) = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{3}$
- ABC est un triangle rectangle en B, alors d'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3^2 + 2^2 = 13$. Ainsi, $AC = \sqrt{13}$.
- ABC est un triangle rectangle en B, alors $\cos(\beta) = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{\sqrt{13}}$.
- ABC est un triangle rectangle en B, alors $\cos(\alpha) = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

Exercice n°5

— ABC est un triangle rectangle en A, alors $\tan\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{3} \Leftrightarrow AC = 3\tan 50°$.

— ABC est un triangle rectangle en A, alors $\tan(\alpha+\beta) = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{3} \Leftrightarrow AD = 3\tan 57°$.

— $CD = AD - AC = 3\tan 57° - 3\tan 50° \approx 1{,}045$.

Exercice n°6

D'une part, on a :
Les droites (AJ) et (BD) sont sécantes en I.
Les droites (AD) et (BJ) sont parallèles.
Alors d'après le théorème de Thalès :
$\frac{IJ}{IA} = \frac{IB}{ID} = \frac{JB}{AD}$. $(*)$
D'autre part, on a :
Les droites (AK) et (BD) sont sécantes en I.
Les droites (AB) et (DK) sont parallèles.
Alors d'après le théorème de Thalès :
$\frac{IA}{IK} = \frac{IB}{ID} = \frac{AB}{KD}$. $(**)$
$(*)$ et $(**)$ impliquent $\frac{IJ}{IA} = \frac{IA}{IK}$.
Par conséquent, $IA^2 = IJ \times IK$.

Exercice n°7

1. ABD est un triangle rectangle, alors d'après le théorème de Pythagore :
   $BD^2 = 8^2 + 6^2 = 100$.
   Ainsi, $BD = 10$.
2. L'aire du triangle BDA est égale à :
   $\frac{AB \times AD}{2} = \frac{8 \times 6}{2} = 24$.
3. L'aire du triangle BDA est aussi égale à :
   $\frac{BD \times AH}{2}$.
   Ainsi, $\frac{BD \times AH}{2} = 24 \Leftrightarrow \frac{10 \times AH}{2} = 24 \Leftrightarrow 5 \times AH = 24$.
   Par conséquent, $AH = 4{,}8$.
4. L'aire du triangle BDA est égale à : $\frac{BD \times AH}{2}$. $(*)$
   Or, dans le triangle ABH rectangle H, $\sin(\widehat{ABD}) = \frac{AH}{AB}$.
   Autrement dit, $AH = AB\sin(\widehat{ABD})$.
   En substituant AH par son expression dans $(*)$, on obtient :
   $$\frac{1}{2} \times BD \times AB \times \sin(\widehat{ABD}).$$
   On déduit alors que,
   $$\sin(\widehat{ABD}) = \frac{2 \times 24}{10 \times 8} = \frac{48}{80} = 0{,}6.$$
   Par conséquent, $\widehat{ABD} = \arcsin(0{,}6) \approx 37°$.

Exercice n°8

Les coordonnées du milieu du segment $[AB]$ sont : $\left(\frac{2+(-1)}{2}; \frac{3+(-4)}{2}\right)$, soit $\left(\frac{1}{2}; \frac{-1}{2}\right)$.

Exercice n°9

Sachant que : $C(-1;-3)$ et $D(3;1)$:
$CD = \sqrt{(3-(-1))^2 + (1-(-3))^2}$.
$CD = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$.

Exercice n°10

On considère les points $A(3;-1)$, $B(5;2)$ et $C(7;-1)$.

1. $AB = \sqrt{(5-3)^2 + (2-(-1))^2}$.
   $AB = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.

   $AC = \sqrt{(7-3)^2 + (-1-(-1))^2}$.
   $AC = \sqrt{4^2+0^2} = \sqrt{16} = 4$.

   $CB = \sqrt{(7-5)^2 + (-1-2)^2}$.
   $CB = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.

2. ABC est un triangle isocèle en B. En effet, $AB = BC$

Exercice n°11

On considère les points $A(-2;1)$, $B(-4;4)$ et $C(0;-2)$.

1. $AB = \sqrt{(-4-(-2))^2 + (4-1)^2}$.
   $AB = \sqrt{(-2)^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.

   $AC = \sqrt{(0-(-2))^2 + (-2-1)^2}$.
   $AC = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$.

   $CB = \sqrt{(-4-0)^2 + (4-(-2))^2}$.
   $CB = \sqrt{(-4)^2+6^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

2. Selon la question précédente, on a :
   $AB + AC = BC$.
   Donc les points A, B et C sont bel et bien alignés.

Exercice n°12

1. $DE^2 = (15-(-2))^2 + (-1-(-1))^2 = 17^2 = 289$.
   $DF^2 = (-2-11)^2 + (-1-2\sqrt{13}+1)^2 = 13^2 + = 169 + 52 = 221$.
   $EF^2 = (15-11)^2 + (-1-2\sqrt{13}+1)^2 = 4^2 + 12 = 16 + 52 = 68$.
   L'égalité $DE^2 = EF^2 + DF^2$ est vérifiée, alors d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle DEF est rectangle en F.
2. DEF est un triangle rectangle en F, alors :
   $\tan(\widehat{EDF}) = \frac{EF}{FD} = \frac{\sqrt{68}}{\sqrt{221}}$.
   Par conséquent, $\widehat{EDF} = \arctan\left(\frac{\sqrt{68}}{\sqrt{221}}\right) \approx 29°$.

Exercice n°13

1. ABH est un triangle rectangle en H, alors d'après le théorème de Pythagore :
   $AB^2 = AH^2 + HB^2$.
   Autrement dit, $BH^2 = AB^2 - AH^2$.
2. ACH est un triangle rectangle en H, alors d'après le théorème de Pythagore :
   $AC^2 = AH^2 + HC^2$.
   Autrement dit, $CH^2 = AC^2 - AH^2$.
3. En utilisant la deuxième identité remarquable, on obtient :
   $CH^2 = (BC - HB)^2$
   $CH^2 = BC^2 + HB^2 - 2 \times BH \times BC$.
4. En soustrayant membre à membre les égalité obtenues dans des questions 1. et 2., on obtient :
   $CH^2 - BH^2 = AC^2 - AB^2$.
   Et selon la question précédente :
   $CH^2 - BH^2 = BC^2 - 2 \times BH \times BC$.
   Ainsi,
   $AC^2 - AB^2 = BC^2 - 2 \times BH \times BC$.
   Par conséquent,
   $$BH = \frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2 \times BC}.$$
5. ABH est un triangle rectangle en H, alors :
   $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{BH}{AB}$.
6. En remplaçant BH par l'expression obtenue dans la question 4., on obtient :
   $$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \times BC \times AB}.$$
7. Quand le triangle est rectangle en B, nous avons selon le théorème de Pythagore :
   $AB^2 + BC^2 = AC^2$.
   Donc, $\cos(\widehat{ABC}) = 0$.

Exercice n°14

1. $AC = \sqrt{(5-2))^2 + (7-3)^2}$.
   $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.
   Donc le point A appartient au cercle de centre C et de rayon 5.
2. $OB = \sqrt{(13-0))^2 + (1-0)^2}$.
   $OB = \sqrt{13^2 + 1^2} = \sqrt{169+1} = \sqrt{170}$.
   $BJ = \sqrt{(13-0))^2 + (1-1)^2}$.
   $BJ = \sqrt{13^2 + 0^2} = \sqrt{169} = \sqrt{169}$.

   $OJ \neq BJ$ donc le point B n'appartient pas à la médiatrice du segment $[OJ]$?
3. $JD = \sqrt{(4-0))^2 + (-1-1)^2}$.
   $JD = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$.
   $JA = \sqrt{(2-0))^2 + (3-1)^2}$.
   $JA = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$.
   $AD = \sqrt{(4-2))^2 + (-1-3)^2}$.
   $AD = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$.
   $AD = JD$, donc le triangle JAD est isocèle en D.

Exercice n°15

On considère un triangle ABC quelconque et H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$ avec $AH = 4$, $BH = 6$ et $CH = 3$.

1. ACH est un triangle rectangle en H, alors d'après le théorème de Pythagore :
   $AC^2 = AH^2 + CH^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$.
   Ainsi, $AC = \sqrt{25} = 5$.
   ABH est un triangle rectangle en H, alors d'après le théorème de Pythagore :
   $AB^2 = AH^2 + BH^2 = 6^2 + 4^2 = 36 + 16 = 52$.
   Ainsi, $AB = \sqrt{52}$.
2. Vérifions l'égalité : $BC^2 = BA^2 + AC^2$.
   D'une part, $BC^2 = 9^2 = 81$.
   D'autre part, $BA^2 + AC^2 = 52 + 25 = 77$.
   L'égalité n'est pas vérifiée alors d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle en A.

Exercice n°16

On considère un parallélogramme $ABCD$ et H est le projeté orthogonal de A sur la droite (CD).

1. Je vous fais confiance pour la figure.
2. ADH est un triangle rectangle en H, alors :
   $\sin(\widehat{ADH}) = \dfrac{AH}{AD} = \dfrac{2}{4}$.
   Ainsi, $\widehat{ADH} = \arcsin\left(\dfrac{2}{4}\right) = 30°$.
3. $\widehat{ADC} = \widehat{ADH} = 30°$.
4. L'aire du parallélogramme $ABCD$ est égale à :
   $AB \times AH = 8 \times 2 = 16$ unités au carré.

Exercice n°17

$ABCD$ est un rectangle de longueur $AB = 8$ et de largeur $BC = 6$. On appelle H le projeté orthogonal de B sur la diagonale $[AC]$.

1. L'aire du triangle ABC est donnée par les deux expressions : $\dfrac{AB \times BC}{2} = \dfrac{BH \times AC}{2}$.
   Or, selon le théorème de Pythagore appliqué sur le triangle ABC rectangle en B :
   $AC = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{100} = 10$.
   On déduit alors que : $\dfrac{8 \times 6}{2} = \dfrac{BH \times 10}{2}$.
   Autrement dit, $24 = 5 \times BH$. Soit $BH = \dfrac{24}{5}$.
2. Je vous fais confiance pour la figure.
   L'aire du rectangle $AHBK$ est égale à $AH \times BH$.
   Or, selon le théorème de Pythagore appliqué sur le triangle ACH rectangle en H :
   $AH = \sqrt{8^2 - 4{,}8^2} = 6{,}4$.
   Par conséquent, $AH \times BH = 6{,}4 \times 4{,}8 = 30{,}72$.

Exercice n°18

1. Cet algorithme écrit en Python permet de déterminer les coordonnées du milieu de $[AB]$.
2. Cet algorithme écrit en Python permet de déterminer la distance entre deux points.