Corrigés

Série d'exercices — Classe : Seconde — Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

1. 0 est un multiple de tous les entiers.
2. 1 est un diviseur de tous les entiers.

Exercice n°2

Mettre une croix dans les cases qui conviennent :

$\in$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}/\mathbb{Q}$
π				✓
3,1415		✓	✓	
$\dfrac{42}{7}$	✓	✓	✓	
$\dfrac{3}{4}$		✓	✓	
$\dfrac{6}{7}$			✓	
$\sqrt{5}$				✓
$\sqrt{81}$	✓	✓	✓	
0,00032		✓	✓	

Exercice n°3

1. 175 est un multiple de 5.
2. 11 est un diviseur de 99.
3. 3 est un diviseur de 243 333.

Exercice n°4

Compléter les phrases suivantes :

1. Si le chiffre des unités d'un nombre entier est 0, 2, 4, 6 ou 8 alors ce nombre est divisible par 2.
2. Si le chiffre des unités d'un nombre entier est 0 ou 5 alors ce nombre est divisible par 5.
3. Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 3 alors ce nombre est divisible par3.
4. Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 9 alors ce nombre est divisible par 9.

Exercice n°5

1. Vrai. En effet, soit n un multiple de 8, il existe alors un entier k tel que $n = 8\times k$. Or, $n = 4\times 2k$, donc n est un multiple de 4.
2. Faux. En effet, 12 est un multiple de 4 mais pas un multiple de 8.
3. Faux. En effet, 3 est un diviseur de 15 mais pas de 5.
4. Vrai. En effet, 1 et 5 sont les diviseurs de 5. Ils sont également des diviseurs de 15.
5. Faux. En effet, 11 est un diviseur de 55 mais pas un multiple de 5.

Exercice n°6

On remarque que :
$\overline{abcabc} = \overline{abc}\times 1000 + \overline{abc} = 1001\times \overline{abc}$.
Or, 1001 est un multiple de 7, 11 et 13.
Par conséquent, $\overline{abcabc}$ est un multiple de 7, 11 et 13

Exercice n°7

Soit p un entier impair quelconque, on peut donc l'écrire sous la forme $p = 2k+1$, avec k un entier.
Soit q un autre entier impair quelconque, on peut également l'écrire sous la forme $q = 2k'+1$, avec k' un entier.
Or,

$$\begin{aligned} pq &= (2k+1)(2k'+1) \\ &= 4kk' + 2k + 2k' + 1 \\ &= 2\,(2kk' + k + k') + 1. \end{aligned}$$

On peut donc écrire le produit sous la forme « $2\times$ (un entier) $+ 1$ », ce qui prouve qu'il est forcément impair.

Exercice n°8

1. 54, 108, 162, 216, $\boxed{270}$ sont les cinq premiers multiples de 54.
2. 90, 180, $\boxed{270}$, 380, 450 sont les cinq premiers multiples de 90.
3. Les deux bus se retrouvent donc à cette station pour la première fois, au bout de 270 minutes.

Exercice n°9

La décomposition du nombre de filles en produit de facteurs premiers, nous donne :

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Donc : $72 = 2^3\times 3^2 = 2^2\times \boxed{2\times 3^2} = 4\times\boxed{18}$.

La décomposition du nombre de garçons en produit de facteurs premiers, nous donne :

$$\begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Donc, $108 = 2^2\times 3^3 = 2\times 3\times \boxed{2\times 3^2} = 6\times\boxed{18}$. On constate donc que, le professeur d'EPS peut constituer 18 équipes de 4 filles et 6 garçons, soit 10 joueurs.

Exercice n°10

Écrire le résultat des opérations suivantes sous la forme d'une fraction irréductible :

a) $\frac{1}{3}+\frac{5}{2}=\frac{2}{6}+\frac{15}{6}=\frac{17}{6}$.

b) $\frac{1}{4}+\frac{4}{3}=\frac{3}{12}+\frac{16}{12}=\frac{19}{12}$.

c) $-\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=-\frac{4}{6}+\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$.

d) $\frac{5}{12}-\frac{5}{8}=\frac{10}{24}-\frac{15}{24}=-\frac{5}{24}$.

e) $\frac{7}{8}\times\frac{6}{13}=\frac{7\times 3}{4\times 13}=\frac{21}{52}$.

f) $5-\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{2}\right)=\frac{30}{6}-\left(\frac{2}{6}+\frac{15}{6}\right)=\frac{13}{6}$.

g) $\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}}=\frac{1}{\frac{5}{6}}=\frac{6}{5}$.

h) $\frac{-3}{\frac{2}{3}-\frac{8}{7}}=\frac{-3}{\frac{14}{21}-\frac{24}{21}}=\frac{-3}{-\frac{10}{21}}=3\times\frac{21}{10}=\frac{63}{10}$.

i) $\frac{\frac{6}{35}}{\frac{3}{5}}=\frac{6}{35}\times\frac{5}{3}=\frac{2}{7}$.

Exercice n°11

a) $3x+\frac{1}{x}=3x\times\frac{x}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3x^2+1}{x}$.

b) $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}=\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}\times\frac{x}{x}=\frac{1+4x}{x^2}$.

c) $\frac{2}{x}-\frac{x}{2}=\frac{2}{x}\times\frac{2}{2}-\frac{x}{2}\times\frac{x}{x}=\frac{4-x^2}{2x}$.

d) $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\frac{1}{a}\times\frac{b}{b}+\frac{2}{b}\times\frac{a}{a}=\frac{b+2a}{ab}$.

e) $\frac{b+1}{ab}-\frac{4}{a}=\frac{b+1}{ab}-\frac{4}{a}\times\frac{b}{b}=\frac{1-3b}{ab}$.

a) $\frac{x}{x+1}-\frac{1}{2}=\frac{x}{x+1}\times\frac{2}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{x+1}{x+1}=\frac{x-1}{2(x+1)}$.

Exercice n°12

Compléter les égalités suivantes :

a) $10^{-8}\times 10^5=10^{-3}$

b) $10^{11}\times 10^{-4}=10^7$

c) $\frac{10^{-4}}{10^{-3}}=10^{-1}$

d) $\frac{10^4}{10^{-11}}\times 10^{-6}=10^5$

e) $0{,}003\times 10^{-5}=3\times 10^{-8}$

f) $123{,}12\times 10^{-7}=1{,}2312\times 10^{-5}$

g) $12{,}24\times 10^{2}=1\ 224$.

Exercice n°13

1. $2^4\times 2^8\times\left(2^{-5}\right)^3=2^{4+8}\times 2^{-15}=2^{12-15}=2^{-3}$.

2. $\frac{3^{-24}\times\left(3^4\right)^7}{3^5}=\frac{3^{-24}\times 3^{28}}{3^5}=\frac{3^4}{3^5}=3^{-1}$.

3.

$$\begin{aligned}\left(-3^4\right)^2\times 9^6\times 27^{-2} &= 3^8\times\left(3^2\right)^6\times\left(3^3\right)^{-2}\\ &= 3^8\times 3^{12}\times 3^{-6}\\ &= 3^{14}.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\frac{\left(3^3\times 10^{-3}\right)^2}{3\times 10^{-8}} &= \frac{\left(3^3\right)^2}{3}\times\frac{\left(10^{-3}\right)^2}{10^{-8}}\\ &= \frac{3^6}{3}\times\frac{10^{-6}}{10^{-8}}\\ &= 3^5\times 10^2.\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\frac{(-18)^2\times 5}{15^2\times 3} &= \frac{\left(3^2\times 2\right)^2\times 5}{(3\times 5)^2\times 3}\\ &= \frac{3^4\times 2^2\times 5}{3^2\times 5^2\times 3}\\ &= \frac{3^4}{3^3}\times 2^2\times\frac{5}{5^2}\\ &= 3\times 2^2\times 5^{-1}.\end{aligned}$$

Exercice n°14

a) $1{,}58\times 10^3$.

b) $1{,}3533\times 10^{-1}$.

c) 2×10^{-8}.

d) $7{,}1\times 10^3$.

e) $1{,}2312\times 10^5$.

f) $-1{,}34\times 10^{-11}$.

Exercice n°15

a) $\sqrt{20}=\sqrt{4\times 5}=\sqrt{4}\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

b) $\sqrt{72}=\sqrt{36\times 2}=\sqrt{36}\times\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

c) $\sqrt{27}=\sqrt{9\times 3}=\sqrt{9}\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

d) $\sqrt{32}=\sqrt{16\times 2}=\sqrt{16}\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

e) $\sqrt{45}-\sqrt{20}=\sqrt{9\times 5}-\sqrt{4\times 5}=\sqrt{9}\sqrt{5}-\sqrt{4}\sqrt{5}=3\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

f) $3\sqrt{2}-4\sqrt{8}+2\sqrt{18}=3\sqrt{2}-4\sqrt{4\times 2}+2\sqrt{9\times 2}=3\sqrt{2}-4\times 2\times\sqrt{2}+2\times 3\times\sqrt{2}$

Donc $3\sqrt{2}-4\sqrt{8}+2\sqrt{18}=3\sqrt{2}-8\sqrt{2}+6\sqrt{2}=\sqrt{2}$

Exercice n°16

a) $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$

b) $\left(-2\sqrt{3}\right)^2 = (-2)^2 \times \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 \times 3 = 12$

c) $\left(-4\sqrt{5}\right)^2 = (-4)^2 \times \left(\sqrt{5}\right)^2 = 16 \times 5 = 80$

d) $\left(2\sqrt{2}\right)^3 = 2^3 \times \left(\sqrt{2}\right)^2 \times \sqrt{2} = 8 \times 2 \times \sqrt{2} = 16\sqrt{2}$

e) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$

f) $\dfrac{12\sqrt{5}}{\sqrt{3} \times \sqrt{15}} = \dfrac{12\sqrt{5}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5}} = \dfrac{12}{3} = 4$

Exercice n°17

a) $\sqrt{3} \times \sqrt{7} = \sqrt{3 \times 7} = \sqrt{21}$.

b) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\dfrac{18}{12}} = \sqrt{\dfrac{3 \times 6}{2 \times 6}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

c) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ n'est pas simplifiable.

d) $5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 \times 2} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{50}$.

e) $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \times 5} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{45}$.

f) $2\sqrt{10} = \sqrt{4} \times \sqrt{10} = \sqrt{4 \times 10} = \sqrt{40}$.

g) $10^2\sqrt{10^5} = \sqrt{(10^2)^2} \times \sqrt{10^5} = \sqrt{10^4 \times 10^5} = \sqrt{10^9}$.

Exercice n°18

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

b) $-\dfrac{2}{\sqrt{7}} = -\dfrac{2}{\sqrt{7}} \times \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = -\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

c) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}$.

d)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} &= \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} \\
&= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\left(\sqrt{6}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{6-5} \\
&= \sqrt{6}+\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3-\sqrt{2}} &= \frac{1}{3-\sqrt{2}} \times \frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} \\
&= \frac{3+\sqrt{2}}{3^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} \\
&= \frac{3+\sqrt{2}}{9-2} \\
&= \frac{3+\sqrt{2}}{7}.
\end{aligned}$$

f) $\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \dfrac{-\sqrt{21}-3}{4}$.

Exercice n°19

Le triangle est rectangle alors d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}
\text{hypoténuse} &= \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2-\sqrt{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{2^2 \times \sqrt{2}^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{4 \times 2 + 4 - 4\sqrt{2} + 2} \\
&= \sqrt{14 - 4\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\text{périmètre} &= 2\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} + \sqrt{14 - 4\sqrt{2}} \\
&= 2 + \sqrt{2} + \sqrt{14 - 4\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Exercice n°20

1. (a) $(2k+1)^2 = (2k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1$.
   (b) n^2 peut s'écrire sous la forme « $2 \times (\text{un entier}) + 1$ ».
   Il est donc impair.
2. (a) $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q} \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\dfrac{p}{q}\right)^2$
   $\Rightarrow 2 = \dfrac{p^2}{q^2}$
   $\Rightarrow p^2 = 2q^2$.
   p^2 s'écrit sous la forme « $2 \times (\text{un entier})$ », il est donc pair.
   Par conséquent p est forcément pair lui aussi.
   (b) Si $p = 2k$ alors $p^2 = 2q^2 \Rightarrow (2k)^2 = 2q^2$
   $\Rightarrow 4k^2 = 2q^2$
   $\Rightarrow q^2 = 2k^2 = 2 \times (\text{un entier})$.
   Donc si p est pair alors q^2 l'est aussi, ce qui entraine que q est également pair.
   Dès lors $\dfrac{p}{q} = \dfrac{2 \times (\text{un entier})}{2 \times (\text{un autre entier})}$ ne pourrait pas être irréductible.
   Ce qui contredit l'hypothèse de départ que $\sqrt{2}$ pourrait s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible $\dfrac{p}{q}$.
   Conclusion : $\sqrt{2}$ ne pouvant pas s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible d'entiers, il est donc un nombre irrationnel.

Exercice n°21

1. Cet algorithme affiche 1^3, 2^3, $\cdots$, 10^3.
2. Celui-ci affiche les premiers entiers i tel que $i^3 < 500$.