Phénomènes d'évolution - suites arithmétiques

Cours, méthodes et exercices d'entraînement

1 Introduction

Définition

Une suite numérique est une liste ordonnée de nombres réels, indexée par les entiers naturels. On la note (u_n), et u_n désigne le terme de rang n.

Exemple

Compléter les suites suivantes puis déterminer si possible u_{10}.

- $1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5$ .....
- $2\,;\,4\,;\,6\,;\,8\,;\,10$ .....
- $3\,;\,7\,;\,11\,;\,15\,;\,19$ .....
- $2\,;\,4\,;\,8\,;\,16\,;\,32$ .....
- $2\,;\,3\,;\,5\,;\,9\,;\,17$ .....
- $0\,;\,1\,;\,8\,;\,27\,;\,64\,;\,125$ .....
- $1\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,5\,;\,8\,;\,13\,;\,21$ .....

2 Modes de génération d'une suite

2.1 Définition explicite

Définition

Une suite (u_n) est définie de manière explicite lorsque l'on peut exprimer directement u_n en fonction de n.

Exemple

Pour chacune des suites suivantes, calculer u_n en remplaçant n par la valeur souhaitée :

- $u_n = 0{,}5n^2 + 1$ .....
- $u_n = 1 + \frac{2}{n}$ .....
- $u_n = 3n - 7$ .....
- $u_n = 2^n$ .....

Exercice 1 Calculs de termes

On considère la suite définie par $u_n = 0{,}5n^2 + 1$. Calculer :

- $u_0 =$ .....
- $u_1 =$ .....

- $u_2 =$ .....
- $u_{10} =$ .....
- $u_{100} =$ .....

Exercice 2 Fractions

On considère la suite définie par $u_n = 1 + \frac{2}{n}$. Calculer :

- $u_3 =$ .....
- $u_4 =$ .....
- $u_5 =$ .....
- $u_{10} =$ .....
- $u_{100} =$ .....

2.2 Définition par récurrence

Définition

Une suite (u_n) est définie par récurrence lorsque :

- on connaît son terme initial ;
- on connaît une relation permettant de calculer u_{n+1} à partir de u_n.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1000, \\ u_{n+1} = 1{,}04\, u_n. \end{cases}$ Calculer :

a) $u_1 =$ .....
b) $u_2 =$ .....
c) $u_3 =$ .....
d) $u_4 =$ .....

Exercice 3 Calculs par récurrence

1. On considère la suite définie par $u_0 = -3$, $u_{n+1} = 2u_n - 5$. Calculer :
   $u_1 =$ .....
   $u_2 =$ .....
   $u_3 =$ .....
   $u_4 =$ .....

2. On considère la suite définie par $u_0 = 2$, $u_{n+1} = n + u_n$. Calculer :
   $u_1 =$ .....
   $u_2 =$ .....
   $u_3 =$ .....
   $u_4 =$ .....

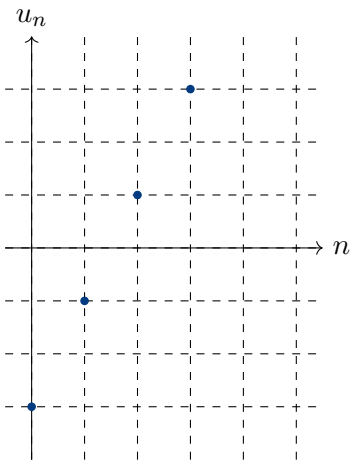
3 Représentation graphique

Définition

La représentation graphique d'une suite (u_n) est l'ensemble des points $M_n(n, u_n)$ dans un repère.

Exemple

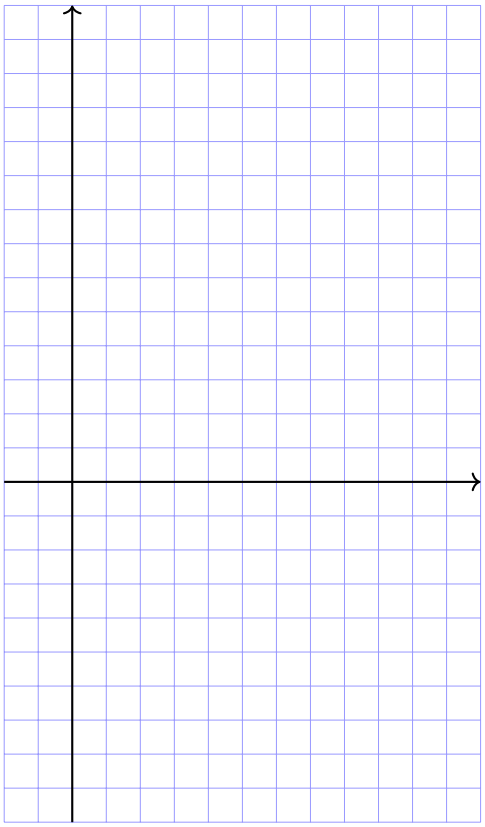
On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 2n - 3$. Calculer :



- $u_0 =$ .....
  .....
- $u_1 =$ .....
  .....
- $u_2 =$ .....
  .....
- $u_3 =$ .....
  .....

Exercice 4 Nuage de points

Représenter la suite (u_n) définie par $u_n = -n^2 + 7n + 1$ dans le repère ci-contre.



- $u_0 =$ .....
  .....
- $u_1 =$ .....
  .....
- $u_2 =$ .....
  .....
- $u_3 =$ .....
  .....
- $u_4 =$ .....
  .....
- $u_5 =$ .....
  .....
- $u_6 =$ .....
  .....
- $u_7 =$ .....
  .....

4 Sens de variation

Définition

- (u_n) est croissante si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geq u_n$.
- (u_n) est décroissante si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq u_n$.
- (u_n) est constante si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$.

Toutes les suites ne sont pas croissantes ou décroissantes. En effet,
La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ .....

Méthode

Dans la pratique, pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n), on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Exemple

On considère la suite définie par $u_n = 3n + 2$. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

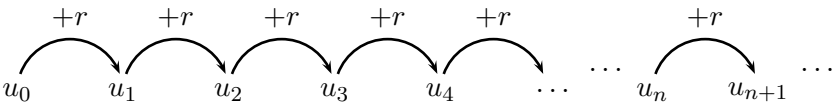
$u_{n+1} - u_n =$.....
.....
.....
.....

5 Suites arithmétiques

Les suites arithmétiques permettent de modéliser des phénomènes dont l'évolution se fait par ajouts ou retraits successifs d'une même quantité.
Elles interviennent notamment lorsque l'on observe une augmentation ou une diminution constante d'une quantité au cours du temps.

Définition

Une suite est dite arithmétique lorsque chaque terme se déduit du précédent en lui ajoutant un nombre réel constant r, appelé raison de la suite. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + r$.



Propriété

Une suite est arithmétique si et seulement sa représentation graphique est un nuage de points alignés. On parle alors de croissance linéaire.

Exemple

La suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier n par la relation $u_{n+1} = u_n + 1$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$.

Exercice 5

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_n = -5n + 2$. Quelle est la nature de cette suite ?

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 6

On considère la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par : $v_0 = -5$ et $v_{n+1} = v_n + 6$. Quelle est la nature de cette suite ?

.....
.....
.....
.....

Exercice 7

Brahim décide de suivre un régime amaigrissant qui doit lui permettre de perdre 4 kg par mois. Sa masse initiale est de 115 kg. On pose $m_0 = 115$ et on note m_n sa masse après n mois de régime. Quelle est la nature de cette suite ?

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors, pour tout entier n, $u_n = u_0 + nr$.
Si $r > 0$, (u_n) est croissante ; si $r < 0$, (u_n) est décroissante ; si $r = 0$, (u_n) est constante.

Exercice 8

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de premier terme $a_0 = 1$ et de raison $r = 2$. Donner l'expression de a_n et calculer a_1 et a_2. Puis, déterminer le sens de variation.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 9

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -7$ et de raison $r = -15$. Donner l'expression de u_n et calculer u_1 et u_2. Puis, déterminer le sens de variation.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 10

Chaque année, un magazine perd la moitié de ses abonnés mais en gagne 150 nouveaux.
En 2019, ce magazine compte 120 000 abonnés.
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n le nombre d'abonnés en 2019 + n.

1. Donner u_0. Que représente ce nombre ?

.....
.....

2. Calculer u_1 puis interpréter cette valeur.

.....
.....

3. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

.....

4. Déterminer le nombre d'abonnés en 2024.

.....
.....
.....

Exercice 11

La population d'une ville était de 40 000 habitants en 2010. Elle diminue depuis de 800 habitants chaque année.
On note p_0 la population de la ville en 2010, et p_n la population n années plus tard, c'est-à-dire en 2010 + n.
Montrer que la suite (p_n) est arithmétique ; préciser sa raison et son premier terme.
Calculer le nombre d'habitants dans cette ville en 2020 puis 2030.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....