



Phénomènes aléatoires - Probabilités conditionnelles

Cours, méthodes et exercices d'entraînement

0.1 Tableaux croisés

Définition

Un tableau croisé d'effectifs est un tableau à double-entrées présentant les valeurs du premier caractère en ligne et celles du second caractère en colonne.

- ▶ À l'intersection d'une ligne et d'une colonne, le tableau indique le nombre d'individus présentant simultanément la valeur du premier caractère correspondant à cette ligne et la valeur du second caractère correspondant à cette colonne.
- ▶ On ajoute ensuite une ligne et une colonne « Total » indiquant le nombre d'individus présentant chacune des valeurs du caractère. Ce sont les effectifs marginaux.
- ▶ À l'intersection de la ligne et de la colonne « Total », on indique l'effectif total, c'est-à-dire le nombre d'individus de la population de référence.

Exemple

On place des boules toutes indiscernables au toucher dans un sac. Sur chaque boule colorée est inscrite une lettre. Le tableau suivant présente la répartition des boules.

	Rouge	Vert	Bleu	Total
A	3	5	2	10
B	2	2	6	10
Total	5	7	8	20

Dans ce sac, il y a 2 boules bleues portant la lettre A.

Définition

- ▶ Les fréquences **marginales** correspondent aux fréquences de chaque caractère, par rapport à un effectif global.
- ▶ La fréquence conditionnelle se calcule par rapport à un sous-ensemble de l'effectif total.

Exemple

En utilisant l'exemple précédent, on peut construire le tableau croisé de fréquences.

	Rouge	Vert	Bleu	Total
A	$\frac{3}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{10}{20}$
B	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{10}{20}$
Total	$\frac{5}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{8}{20}$	1

Dans ce tableau, on peut lire par exemple, la fréquence de boules vertes portant la lettre B est égale à $\frac{2}{20}$.

Example

En utilisant l'exemple précédent, on peut trouver les fréquences conditionnelles.

	Rouge	Vert	Bleu	Total
A	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{10}$	1
B	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{6}{10}$	1

Sur la première ligne, on peut lire, parmi les boules portant la lettre A , $\frac{3}{10}$ sont rouges, $\frac{5}{10}$ sont vertes et $\frac{2}{10}$ sont bleues.

Exercice 1

Le tableau ci-dessous indique la répartition de 200 élèves de Première TC d'un lycée selon leur sexe et leur régime :

	Filles	Garçons	Total
Externes	42	22	64
Internes	49	55	104
Demi-pensionnaires	21	11	32
Total	112	88	200

1. (a) Donner l'effectif total de cette population puis l'effectif marginal des filles.
(b) En déduire la fréquence marginale des filles.
2. Déterminer la fréquence marginale en pourcentage des élèves internes.
3. Calculer la fréquence conditionnelle des demi-pensionnaires parmi les garçons.

[illegible]

Exercice 2

Une banque compte 2500 clients. On sait que :

- ▶ 42 % des clients possèdent un plan épargne logement (PEL).
- ▶ Le quart des clients possède un compte épargne logement (CEL).
- ▶ 325 clients possèdent un PEL et CEL.

Compléter le tableau ci-après :



	Titulaire d'un PEL	Non titulaire d'un PEL	Total
Titulaire d'un CEL			
Non titulaire d'un CEL			
Total			

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

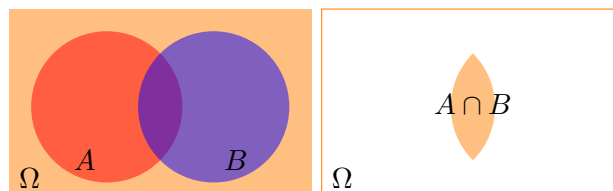
.....

.....

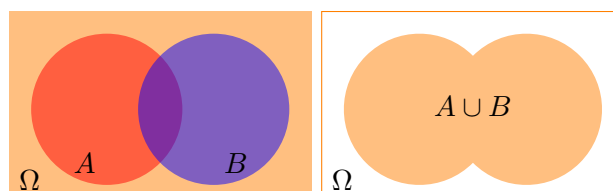
1 Quelques rappels de probabilités

Définition

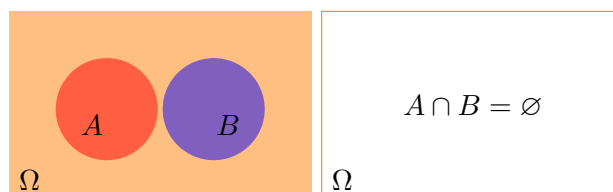
- ▶ Une expérience est dite **aléatoire** lorsqu'on ne peut pas en prévoir avec certitude le résultat.
- ▶ On appelle **univers**, l'ensemble noté Ω de tous les résultats possibles.
- ▶ On appelle **événement**, toute partie de l'univers.
- ▶ On appelle **événement élémentaire**, tout événement ne comportant qu'un seul élément.
- ▶ L'événement $A \cap B$, autrement dit « A et B », est l'événement formé de tous les résultats possibles appartenant à A et à B .



- ▶ L'événement $A \cup B$, autrement dit « A ou B », est l'événement formé de tous les résultats possibles appartenant à A ou à B .

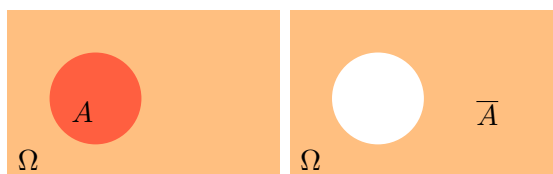


- ▶ Deux événements sont dits **incompatibles** ou **disjoints** si leur intersection est vide.





- On appelle **événement contraire** d'un événement A , l'événement noté $\bar{A}$ formé de tous les résultats possibles n'appartenant pas à A .



- L'événement correspondant à l'ensemble vide est dit **événement impossible**.
- L'événement correspondant à l'univers est dit **événement certain**.

Exemple

On considère un tirage au hasard d'une carte dans un jeu de 32 cartes.

- L'univers Ω est l'ensemble formé des 32 cartes.
- « Obtenir un as » est un événement.
- « Obtenir un as de pique » est un événement élémentaire.
- Soient A l'événement : « obtenir un as » et B l'événement : « obtenir un coeur ».
- L'événement $A \cap B$ correspond à « obtenir un as **et** un coeur ».
 - L'événement $A \cup B$ correspond à « obtenir un as **ou** un coeur ».
- Les deux événements « obtenir un coeur » et « obtenir un trèfle » sont incompatibles.
- Soit R l'événement « obtenir une carte rouge ». $\bar{B}$: « obtenir une carte noire » est l'événement contraire.
- « obtenir un 2 » est événement impossible.
- « obtenir une carte rouge ou noire » est un événement certain.

Exercice 3

Un lycée compte 2000 élèves.

On sait que 35 % des lycéens pratique le cyclisme, que 25 % des lycéens pratiquent le tennis et que 15 % pratiquent les deux sports.

On interroge au hasard un lycéen. On note les événements suivants :

C : « la personne choisie pratique le cyclisme » ;

T : « la personne choisie pratique le tennis ».

1. Compléter le tableau ci-après :

	C	$\bar{C}$	Total
T			
$\bar{T}$			
Total			

2. Décrire les événements suivants à l'aide des événements C et T , puis calculer leur probabilité.

E : « La personne pratique au moins un des sports considérés » ;



F : « La personne ne pratique aucun des sports considérés » ;
 G : « La personne pratique le cyclisme et ne pratique pas le tennis » ;
 H : « La personne pratique un et un seul des sports considérés ».

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 4

On tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes.
 On considère les événements suivants.

- ▶ A : la carte tirée est un as.
- ▶ B : la carte tirée est un coeur.

1. Définir par une phrase les événements $\bar{A}$, $A \cap B$ et $A \cup B$.
2. Calculer la probabilité des événements : A , B , $A \cap B$, $A \cup B$ et $\bar{A}$.

.....

.....

.....

.....

.....

2 Probabilité d'un événement

Propriété

- ▶ Pour tout événement A , $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.
- ▶ Si deux événements A et B sont incompatibles, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
- ▶ Si A et B ne sont pas incompatibles, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Exemple

On tire au hasard une carte de façon équiprobable dans un jeu de 32 cartes et on note.

- ★ A l'événement « la carte tirée est un as ».
- ★ B l'événement « la carte tirée est un carreau ».
- ★ C l'événement « la carte tirée est une figure (valet, dame, roi) ».

On a alors :



- ▶ $p(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$; $p(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$; $p(C) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$; $p(A \cap B) = \frac{1}{32}$.
- ▶ $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{4}{32} + \frac{8}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$.
- ▶ $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = \frac{7}{8}$.
- ▶ $p(A \cup C) = p(A) + p(C) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$.

Exercice 5

Soit A et B deux événements tels que :

$p(A) = 0,7$ $p(B) = 0,5$ et $p(A \cap B) = 0,3$. Calculer les probabilités suivantes :

a) $p(\overline{A})$ b) $p(A \cup B)$

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 6

Soit S et T deux événements tels que :

$p(\overline{S}) = 0,5$ $p(T) = 0,6$ et $p(S \cup T) = 0,9$.

Calculer les probabilités suivantes : a) $p(S \cap T)$ b) $p(\overline{S \cup T})$.

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 7

On considère des événements A et B incompatibles tels que $p(\overline{A}) = 0,4$ et $p(B) = 0,2$.

Déterminer $p(A \cup B)$.

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 8

120 élèves de Terminale se répartissent de la façon suivante :

	Filles	Garçons
Pratiquent un sport	65	23
Ne pratiquent aucun sport	21	11



On choisit un élève au hasard parmi les 120. Calculer la probabilité des événements suivants.

- ▶ A : l'élève choisie est une fille pratiquant un sport.
- ▶ B : l'élève choisie est une fille.
- ▶ C : l'élève choisi est un garçon ne pratiquant aucun sport.

.....
.....
.....
.....

Exercice 9

Une urne contient quatre boules numérotées ❶ ❷ ❸ ❹ indiscernables au toucher.

On tire au hasard successivement deux boules, en remettant la première boule tirée dans l'urne.

- ▶ A est l'événement : « La somme des points obtenus est égale à 4. »
- ▶ B est l'événement : « Le produit des points obtenus est égale à 4. »
- a) Représenter la situation par un tableau ou un arbre.
- b) Déterminer $p(A)$ et $p(B)$.
- c) Définir à l'aide d'une phrase les événements $A \cap B$ et $A \cup B$.
- d) Déterminer $p(A \cap B)$ et en déduire $p(A \cup B)$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

3 Probabilités conditionnelles

Définition

Le nombre d'issues qui réalisent l'évènement A est appelé cardinal de A . Il est noté $Card(A)$.

Définition

Soient A et B deux évènements tels que $Card(A) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de B sachant A est la probabilité que l'évènement B soit réalisé sachant que l'évènement A est réalisé. Elle est notée $p_A(B)$:

$$p_A(B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(A)}.$$



Exemple

Dans une classe 1G, après la visite médicale, on a dressé le tableau suivant :

	Porte des lunettes	Ne porte pas de lunettes	Total
Fille	3	15	18
Garçon	7	5	12
Total	10	20	30

Les fiches individuelles de renseignements tombent par terre et s'éparpillent.

On choisit un élève au hasard et on considère les événements suivants :

A : « l'élève est une fille » et B : « l'élève porte des lunettes ».

Ainsi, $p_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$ et $p_B(A) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)} = \frac{3}{10}$.

Exercice 10

On a placé dans un panier des poivrons jaunes ou rouges, provenant de France ou d'Espagne selon la répartition suivante :

	Jaune	Rouge	Total
France	1	2	3
Espagne	4	5	9
Total	5	7	12

On choisit au hasard un poivron dans le panier. On note :

► F : « le poivron provient de France » ;

► J : « le poivron est jaune ».

1. (a) Calculer les probabilités

$p(F)$, $p(J)$ et $p(F \cap J)$.

(b) En déduire la probabilité $p(F \cup J)$.

2. (a) Déterminer la probabilité $p_J(F)$. Interpréter le résultat.

(b) On choisit un poivron provenant de France. Quelle est la probabilité qu'il soit jaune ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Exercice 11**

Une boîte de petits fours contient 50 gâteaux, qui sont chocolatés ou meringués. Ces gâteaux sont soit de forme carrée, soit de forme ronde.

La répartition de ces gâteaux dans la boîte est donnée par le tableau ci-dessous.

	Chocolaté	Meringué	Total
Carrée	10	10	20
Ronde	20	10	30
Total	30	20	50

On choisit au hasard un gâteau dans cette boîte. On note :

► M : « le gâteau est meringué » ;

► R : « le gâteau est de forme ronde ».

- (a) Déterminer la probabilité que le gâteau soit meringué et de forme carrée.
(b) Calculer $p(\overline{M} \cap R)$. Interpréter le résultat.
(c) En déduire $p(\overline{M} \cup R)$.
- (a) Calculer la probabilité que le gâteau soit de forme ronde sachant qu'il est meringué.
(b) Calculer la probabilité que le gâteau soit meringué sachant qu'il est de forme carrée.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 12

Une maladie atteint 3 % d'une population de 30 000 habitants. On soumet cette population à un test :

- parmi les bien-portant, 2 % ont un test positif ;
- parmi les individus malades, 49 ont un test négatif.

- Compléter le tableau suivant :

	Malade	Bien-portant	Total
Test positif			
Test négatif			
Total			

- On choisit au hasard un individu de cette population. On note :
 - T : « le test est positif » ;
 - M : « l'individu est malade ».
 - Définir par une phrase l'évènement $T \cap M$, puis calculer sa probabilité.
 - Calculer la probabilité que le test soit positif sachant que l'individu n'est pas malade.



(c) Calculer la probabilité que l'individu soit malade sachant que le test est positif.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4 Arbre de probabilité

Exemple

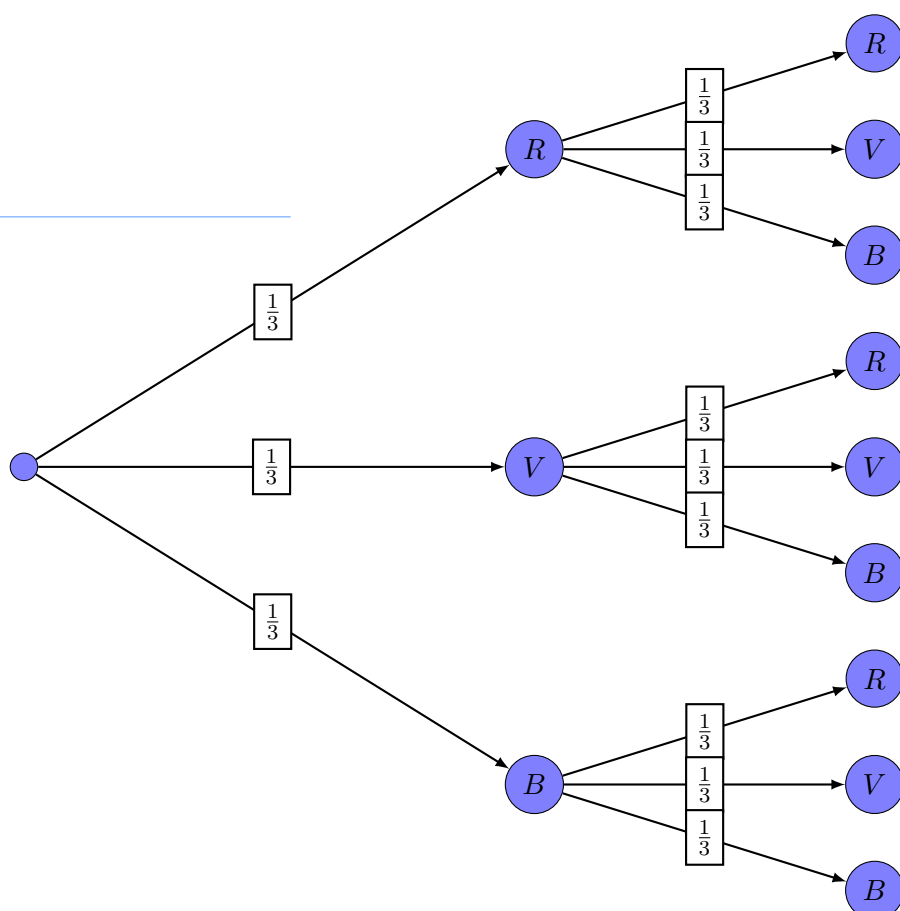
Tirages successifs avec remise

Une boîte contient 3 jetons : un rouge noté R , un vert noté V et un jeton bleu noté B .

On tire au hasard un premier jeton que l'on remet dans la boîte avant de tirer un deuxième jeton. Le nombre des issues possibles est égal à 9.

► $p(\text{« obtenir deux jetons rouges »}) = \frac{1}{9}$.

► $p(\text{« obtenir au moins un jeton rouge »}) = \frac{5}{9}$.





Exercice 13

On lance 3 fois de suite une pièce. Calculer la probabilité des événements suivants.

- ▶ A : obtenir exactement une fois pile.
- ▶ B : obtenir au moins une fois pile.
- ▶ C : obtenir au plus une fois pile.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 14

Un couple de futurs parents décide d'avoir trois enfants. On suppose qu'ils auront autant de chances d'avoir un garçon qu'une fille et qu'il n'y aura pas de jumeaux.

1. À l'aide d'un arbre, déterminer la liste de tous les résultats possibles.
2. Déterminer la probabilité des événements suivants :

- ▶ A : le couple aura 3 filles.
- ▶ B : le couple aura 3 filles ou 3 garçons.
- ▶ C : le couple aura au moins une fille.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 15

On s'intéresse à la clientèle d'un musée. Chaque visiteur peut acheter son billet sur internet avant sa visite ou l'acheter aux caisses du musée à son arrivée.

Pour l'instant, la location d'un audioguide pour la visite n'est possible qu'aux caisses du musée. Le directeur s'interroge sur la pertinence de proposer la réservation des audioguides sur internet. Une étude est réalisée. Elle révèle que :

- ▶ 70% des clients achètent leur billet sur internet ;
- ▶ parmi les clients achetant leur billet sur internet, 35% choisissent à leur arrivée au musée une visite avec un audioguide ;
- ▶ parmi les clients achetant leur billet aux caisses du musée, 55% choisissent une visite avec



un audioguide.

On choisit au hasard un client du musée. On considère les événements suivants :

- ▶ A : « Le client choisit une visite avec un audioguide » ;
- ▶ B : « Le client achète son billet sur internet avant sa visite ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer les probabilités suivantes : $P(A \cap B)$, $P(A \cap \overline{B})$, $P(B \cap \overline{A})$ et $P(\overline{B} \cap \overline{A})$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 16

Dans une population, les individus sont répartis en 4 groupes sanguins : A, B, AB et O et à l'intérieur de chaque groupe en Rhésus + ou - selon le tableau suivant en pourcentages :

groupe	A	B	AB	O
Rhésus +	38	8	3	36
Rhésus -	7	1	1	6

Un individu est choisi au hasard. Calculer la probabilité :

1. qu'il soit du groupe O sachant qu'il a un rhésus -.
2. qu'il ait un rhésus - sachant qu'il est du groupe O.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Exercice 17

La bibliothèque d'un lycée comporte 150 romans policiers et 50 romans de science-fiction. On sait que 40% des romans policiers sont français et que 70% des romans de science-fiction sont français.

Jacques choisit au hasard un ouvrage parmi les 200 livres de la bibliothèque.

1. Quelle est la probabilité qu'il choisisse un roman policier ?
2. Quelle est la probabilité qu'il choisisse un roman policier français ?
3. Montrer que la probabilité qu'il choisisse un ouvrage d'un auteur français est 0,475.
4. Quelle est la probabilité qu'il choisisse un roman policier sachant que l'auteur est français ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

