



Variation instantanée - Nombre dérivé

Cours, méthodes et exercices d'entraînement

1 Taux de variation

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I .
Soit h un réel non nul tel que $a + h \in I$. Le taux de variation de f entre a et $a + h$ est le rapport (quotient) $t(h)$ défini par : $t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

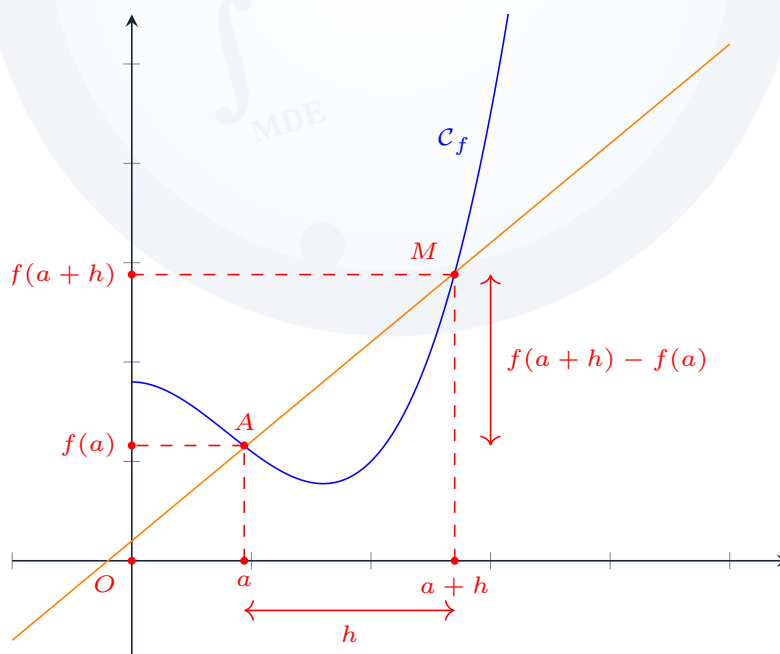
Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Le taux de variation de f entre 1 et 2 est :
.....

On considère deux points A et M d'une courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives a et $a + h$. La droite (AM) est appelée la sécante à la courbe $\mathcal{C}_f$.

Graphiquement, le taux de variation de f entre a et $a + h$ est le coefficient directeur de la sécante (AM) :

$$t(h) = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$



Exercice 1 S

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Calculer le taux de variation de f entre 2 et 3.



-
.....
.....
2. Calculer le taux de variation de f entre 1 et 4.

-
.....
.....
3. Calculer le taux de variation de f entre 1 et $1 + h$.

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 3$.

1. Calculer le taux de variation de g entre 2 et 3.

-
.....
.....
2. Calculer le taux de variation de g entre 2 et 4.

-
.....
.....
3. Calculer le taux de variation de g entre 2 et $2 + h$.

2 Nombre dérivé et tangente à une courbe

Définition

On dit que f est dérivable en a lorsque le taux de variation $t(h)$ admet comme limite un nombre réel quand h tend vers 0. Ce nombre, noté $f'(a)$ est appelé **nombre dérivé** de f en a .

On a ainsi : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$.

Propriété

$\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = l$, se lit la « limite » quand h tend vers 0 de $t(h)$ égale l .

Cela signifie que lorsque le nombre h devient très proche de 0, le nombre $t(h)$ prend des valeurs très voisines de l , autrement dit, aussi proche que l'on veut.

Exemple

► On considère la fonction f définie par : $f(x) = 3x + 1$.

Le nombre dérivé de f en 2 est déterminé par : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$.



.....

► On considère la fonction g définie par : $g(x) = x^2$.

Le nombre dérivé de g en 1 est déterminé par : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h}$.

.....

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 4$.

1. Établir que pour tout réel $h \neq 0$, $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2 + h$.

.....

2. En déduire que f est dérivable en 1 et préciser la valeur du nombre dérivé de f en 1.

.....

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - x + 1$.

1. Établir que pour tout réel $h \neq 0$, $\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = 5 + h$.

.....

2. En déduire que f est dérivable en 3 et préciser la valeur du nombre dérivé de f en 3.

.....

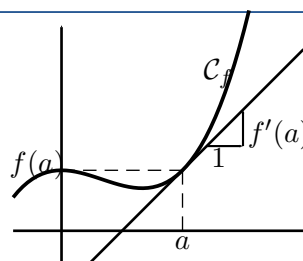
Définition

Soient f une fonction dérivable en a , $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a .

La **tangente à la courbe** $\mathcal{C}_f$ au point A est la droite passant par A de coefficient directeur $f'(a)$.

Son équation réduite est de la forme :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$



Aux alentours du point A , la tangente

**Exemple**

- On considère la fonction f définie par : $f(x) = 3x + 1$.

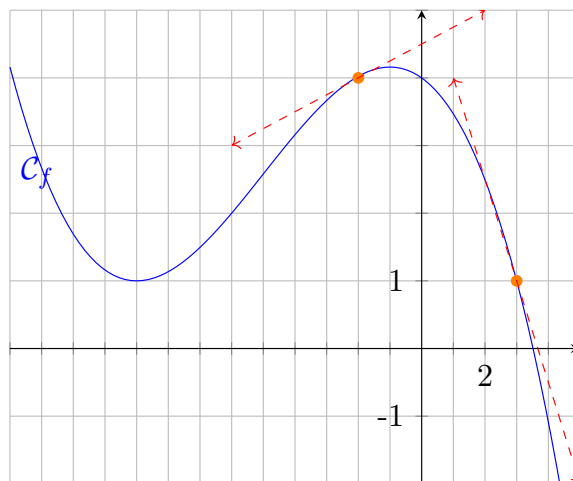
L'équation de la tangente de la courbe $\mathcal{C}_f$ en 2 est donnée par :

- On considère la fonction g définie par : $g(x) = x^2$.

L'équation de la tangente de la courbe $\mathcal{C}_g$ en 1 est donnée par :

Exercice 5

On donne sur la figure ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction définie f sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à cette courbe en certains points.



1. Donner par lecture graphique $f(3)$, $f(-2)$ et $f(-9)$:
2. Donner par lecture graphique $f'(3)$, $f'(-2)$ et $f'(-9)$:
3. Donner les équations des tangentes correspondantes.

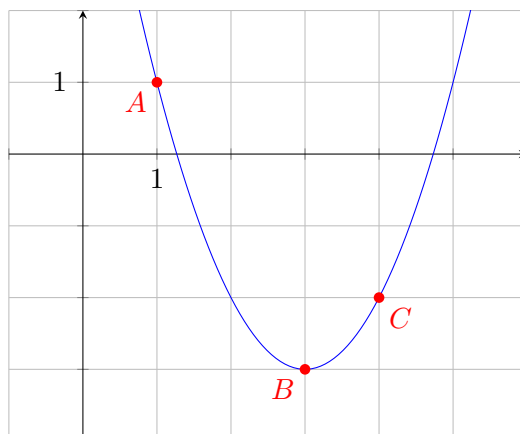
Exercice 6

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

f est dérivable en 1, en 3 et en 4 et telle que :

$$f'(1) = -4; \quad f'(3) = 0; \quad f'(4) = 2.$$

Construire les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ aux points A , B et C et donner les équations réduites de chacune d'elles.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

