



Modèle linéaire continu - fonctions affines

Cours, méthodes et exercices d'entraînement

1 Fonctions affines

Définition

Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax + b$$

où :

- ▶ a est le **coefficient directeur** (pente de la droite) ;
- ▶ b est l'**ordonnée à l'origine**.

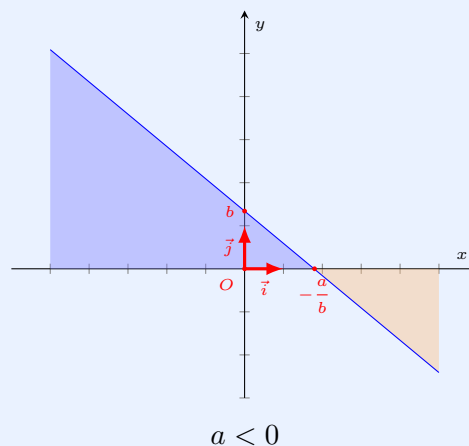
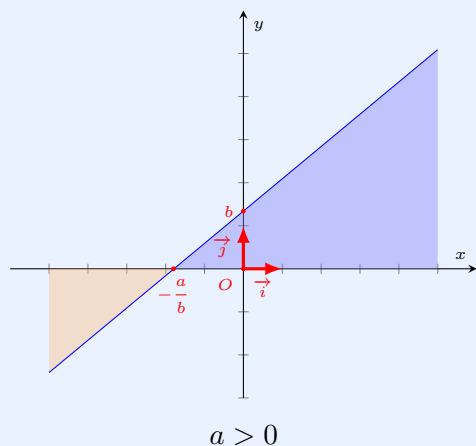
- ▶ Si $b = 0$, la fonction affine devient une **fonction linéaire** : $f(x) = ax$.
- ▶ Le coefficient directeur a indique la **variation** de la fonction : il correspond au taux d'accroissement constant.

Propriété

La courbe représentative d'une fonction affine est une **droite**.

Le signe du coefficient directeur a indique :

- ▶ si $a > 0$, la fonction est **croissante** ;
- ▶ si $a < 0$, la fonction est **décroissante** ;
- ▶ si $a = 0$, la fonction est **constante**.



Exemple

- ▶ $f(x) = 2x + 1$: droite croissante ;
- ▶ $g(x) = -3x + 4$: droite décroissante ;
- ▶ $k(x) = 5$: droite horizontale.



Exercice 1

Justifier que les fonctions dont les expressions sont données ci-dessous sont affines en précisant a et b .

1. $g(x) = -7x$.

.....

2. $f(x) = 5x + 4$.

.....

3. $h(x) = \frac{3 - 2x}{5}$.

.....

4. $k(x) = -\frac{1}{2}(2 - x)$.

.....

Exercice 2

Soit deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 3)^2 - x^2$ et $g(x) = (x - 1)^2 - 3x^2$. Pour chacune d'elles, dire si elle est affine ou non en justifiant.

.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 3

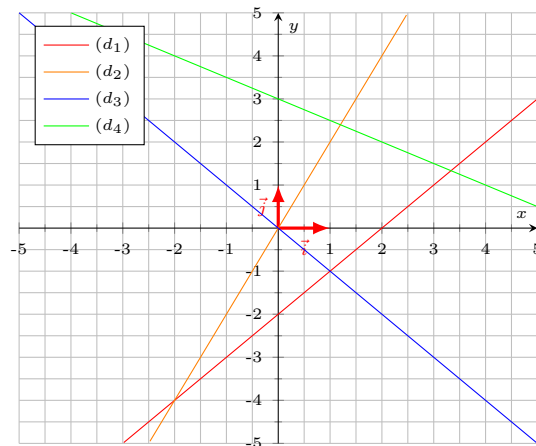
Soit deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 3)^2 - x^2$ et $g(x) = (x - 1)^2 - 3x^2$. Pour chacune d'elles, dire si elle est affine ou non en justifiant.

.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 4

On donne ci-dessous les représentations graphiques de quatre fonctions affines f, g, h et k définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - 0,5x$; $g(x) = 2x$; $h(x) = -x$ et $k(x) = x - 2$. Associer chaque fonction à la droite qui la représente.

.....
.....
.....
.....
.....
.....



**Propriété**

Entre deux points x_1 et x_2 , le taux d'accroissement de f est :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Pour une fonction affine, ce taux est **constant** et vaut :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a.$$

Exemple

Pour $f(x) = 4x - 1$:

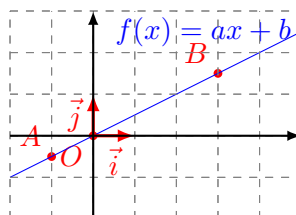
$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{11 - 3}{2} = 4.$$

On retrouve bien le coefficient directeur $a = 4$.

Exercice 5

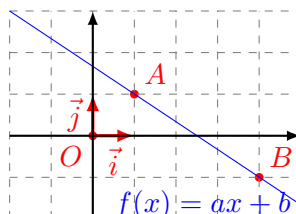
En utilisant la représentation graphique de la fonction f ci-dessous, passant par les points $A(-1; -0.5)$ et $B(3; 1.5)$, déterminer l'expression de $f(x)$, puis les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(1,5)$.

.....
.....
.....
.....
.....

**Exercice 6**

En utilisant la représentation graphique de la fonction f ci-dessous, passant par les points $A(1; 1)$ et $B(4; -1)$, déterminer l'expression de $f(x)$.

.....
.....
.....
.....
.....

**Exercice 7**

Soit une fonction linéaire f telle que $f(0, 2) = 7$. Déterminer l'expression algébrique de $f(x)$.

.....
.....
.....
.....
.....

**Exercice 8**

Soit une fonction affine f telle que $f(2) = 12$ et $f(6) = 2$. Déterminer l'expression algébrique de $f(x)$

Propriété

Pour déterminer la valeur de x telle que $f(x)$ atteigne un seuil S , on résout :

$$f(x) = S \iff ax + b = S.$$

Ainsi :

$$x = \frac{S - b}{a}.$$

Exemple

Pour $f(x) = 3x + 2$, résoudre $f(x) = 20$:

$$3x + 2 = 20 \iff 3x = 18 \iff x = 6.$$

Exercice 9

Soit une fonction affine f telle que $f(x) = -25x + 60$. Déterminer la plus grande valeur de x pour que $f(x) \geq 120$

Les fonctions affines modélisent des phénomènes à **variation uniforme** :

- ▶ température qui augmente régulièrement ;
- ▶ coût proportionnel à une quantité ;
- ▶ distance parcourue à vitesse constante.

Exemple

- ▶ Température : $T(t) = 2t + T_0$;
- ▶ Coût d'un taxi : $C(x) = 1,2x + 4$;
- ▶ Distance à vitesse constante : $d(t) = 5t$.

2 Phénomène discret ou continu de croissance linéaire

**Définition**

Un phénomène est dit **discret** lorsqu'il est décrit par une suite, c'est-à-dire lorsque la variable n est un entier naturel prenant des valeurs isolées.

Un phénomène est dit **continu** lorsqu'il est décrit par une fonction dont la variable (souvent x ou t) prend ses valeurs dans un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exemple

- ▶ Le calcul annuel des intérêts d'un capital est un **phénomène discret** : la variable est un nombre entier d'années.
- ▶ La position en fonction du temps d'un cycliste se déplaçant sur un axe est un **phénomène continu** : la variable est un temps appartenant à un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition

On dit qu'un phénomène présente une **croissance linéaire** lorsque le taux d'accroissement de la suite ou de la fonction qui le modélise est constant.

- ▶ Si le phénomène est **discret**, une croissance linéaire peut être modélisée par une **suite arithmétique**.
- ▶ Si le phénomène est **continu**, une croissance linéaire peut être modélisée par une **fonction affine**.

Exemple

- ▶ Suite arithmétique : $u_{n+1} = u_n + r$ modélise une croissance linéaire discrète.
- ▶ Fonction affine : $f(t) = at + b$ modélise une croissance linéaire continue.

Exercice 10

Le tarif de location d'une maison, fixé initialement à 7 000 € par an, augmente de 400 € chaque année. L'évolution du montant annuel du loyer est-elle discrète ou continue ? Préciser son type de croissance.

.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 11

Une usine produit des stylos dont le coût de fabrication unitaire est de 1,50 €. À ce coût de fabrication s'ajoutent 800 € de frais fixes. On suppose que le coût de production $c(x)$ de x milliers de stylos obéit à une croissance linéaire.

1. Calculer le coût de fabrication de 7500 stylos.

.....

2. La fonction c correspond-elle à une évolution continue ? Justifier.

.....

.....