

Probabilités
conditionnelles

1re Spé Maths

Probabilités
conditionnelles

Événement contraire

Partition de
l'univers

Indépendance

Formule des
probabilités totales

Indépendance

Succession de
deux épreuves
indépendantes

Probabilités conditionnelles

1re Spé Maths

maths-mde.fr

Cours à imprimer pour élève

Lycée Evariste Galois

I. Probabilités conditionnelles

Définition

Soient A et B deux événements d'un univers Ω tels que $p(A) \neq 0$.

On appelle **probabilité de l'événement B sachant que A est réalisé** le nombre noté $p_A(B)$ défini par :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

Propriété

Soient A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. Alors,

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_B(A) = p(B) \times p_A(B).$$

Démonstration

Elle découle de la définition : l'égalité des produits en croix mène à la propriété.

Exemple

Dans une urne, on place 10 boules, 3 noires et 7 rouges. On tire au hasard 3 boules, successivement et sans remise. Quelle est la probabilité de tirer deux boules noires ?

En notant :

- N_1 l'événement « la boule tirée est noire au 1^{er} tirage »,
- N_2 l'événement « la boule tirée est noire au 2^e tirage »,

la probabilité demandée est $p(N_1 \cap N_2)$.

- $p(N_1) = \frac{3}{10}$ car il y a 3 boules noires sur 10 lors du 1^{er} tirage ;
- $p_{N_2}(N_1) = \frac{2}{9}$ car il ne reste plus que 2 boules noires sur 9 au 2^e tirage si l'on sait que l'on a déjà tiré une boule noire au 1^{er} tirage.

Ainsi,

$$\begin{aligned} p(N_1 \cap N_2) &= p(N_1) \times p_{N_2}(N_1) \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \\ &= \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Propriété

Soient A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. Alors,

$$p_A(\overline{B}) = 1 - p_B(A).$$

Démonstration

Par définition,

$$p_A(\overline{B}) = \frac{p(A \cap \overline{B})}{p(A)}.$$

Or, $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$. Ainsi,

$$\begin{aligned} p_{\overline{B}}(A) &= \frac{p(A) - p(A \cap B)}{pA} \\ &= 1 - \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \\ &= 1 - p_B(A). \end{aligned}$$

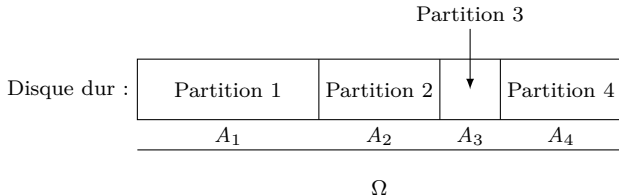
Définition

On dit que les n événements A_1, \dots, A_n forment une **partition** de Ω si :

- tous les événements sont incompatibles deux à deux : $A_i \cap A_j = \emptyset$, pour tout $i \neq j$;
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

Remarque

- A et \bar{A} forment une partition de l'univers, quel que soit l'événement A .
- La notion de partition est similaire en informatique à un espace de stockage peut être découpé en plusieurs partitions.



IV. Indépendance

Propriété

Soient A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. Alors,

$$p_B(A) = p(A) \iff p_A(B) = p(B).$$

Démonstration

$$\begin{aligned} p_B(A) = p(A) &\iff \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = p(A) \\ &\iff \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = p(B) \\ &\iff p_A(B) = p(B). \end{aligned}$$

Définition

Soient A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.

On dit que A et B sont **indépendants** quand $p_B(A) = p(A)$.

Deux événements sont indépendants lorsque la réalisation de l'un ne dépend pas de celle de l'autre.

Propriété

Soient A_1, A_2, \dots, A_n n événements formant une partition de l'univers, avec $p(A_k) \neq 0$,

$1 \leq k \leq n$. Alors, pour tout événement B ,

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \dots + p(A_n \cap B).$$

Démonstration

Les événements $A_k \cap B$ sont incompatibles deux à deux.

De plus,

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B).$$

Donc,

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \dots + p(A_n \cap B).$$

Exemple

Pour produire des pièces métalliques, un atelier utilise trois machines. Toutes les pièces sont vérifiées par le service qualité. Ce service a fourni le tableau suivant après une journée de production.

N° de la machine utilisée	1	2	3
Pourcentage de pièces produites	50	35	15
Fréquence des défauts par machine	0,01	0,02	0,06

On prend au hasard une pièce produite dans la journée.
Déterminer la probabilité qu'elle soit défectueuse.

On convient de noter :

- M_k l'événement : « La pièce provient de la machine n° k » ;
- D l'événement : « La pièce est défectueuse ».

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
 p(D) &= p(D \cap M_1) + p(D \cap M_2) + p(D \cap M_3) \\
 &= p(M_1) \times p_D(M_1) + p(M_2) \times p_D(M_2) + p(M_3) \times p_D(M_3) \\
 &= 0,5 \times 0,01 + 0,35 \times 0,02 + 0,15 \times 0,06 \\
 &= 0,0212.
 \end{aligned}$$

III. Indépendance

Propriété

Soient A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. Alors,

$$p_B(A) = p(A) \iff p_A(B) = p(B).$$

Démonstration

$$\begin{aligned} p_B(A) = p(A) &\iff \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = p(A) \\ &\iff \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = p(B) \\ &\iff p_A(B) = p(B). \end{aligned}$$

Définition

Soient A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.
On dit que A et B sont **indépendants** quand $p_B(A) = p(A)$.

Deux événements sont indépendants lorsque la réalisation de l'un ne dépend pas de celle de l'autre.

Propriété

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

Démonstration

$$\begin{aligned} p_B(A) = p(A) &\iff \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = p(A) \\ &\iff p(A \cap B) = p(A) \times p(B). \end{aligned}$$

Exemple

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements :

- A : « Tirer un cœur » ;
- B : « Tirer un roi ».

On a :

- $p(A) = \frac{1}{4}$ car il y a 8 cœurs sur les 32 cartes en tout ;
- $p_B(B) = \frac{1}{4}$ car, sachant que la carte est un roi, il n'y a qu'une seule carte portant un cœur sur les 4 rois.

On a alors $p(A) = p_B(A)$, ce qui signifie que A et B sont indépendants.

Propriété

Soient A et B deux événements indépendants.
Alors, A et \bar{B} sont indépendants.

Démonstration

On sait que :

$$P_A(\bar{B}) = 1 - p_A(B).$$

Or, $p_A(B) = p(B)$ car les événements A et B sont indépendants.

D'où :

$$p_A(\bar{B}) = 1 - p(B) = p(\bar{B}),$$

ce qui signifie que A et \bar{B} sont indépendants.

Remarque

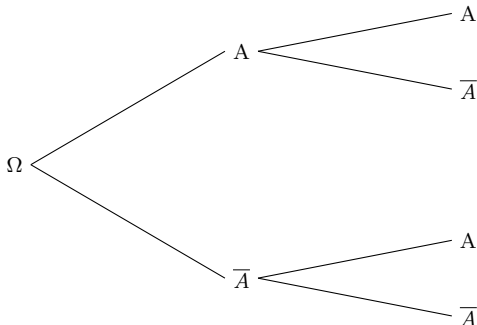
Deux événements A et B incompatibles tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ ne sont pas indépendants.

En effet, A et B incompatibles signifie d'une part que $p(A) \times p(B) \neq 0$, d'autre part que $p(A \cap B) = 0$.

Ainsi, $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$; les événements ne sont donc pas indépendants.

IV. Succession de deux épreuves indépendantes

Imaginons une expérience à 2 issues (A et \bar{A} par exemple) que l'on répète deux fois de façon indépendante. Alors, la situation peut se représenter par l'arbre suivant :



Ainsi,

- la probabilité d'obtenir deux fois l'événement A est $p(A)^2$;
- la probabilité d'obtenir une seule fois l'événement A est $p(A \cap \bar{A}) + p(\bar{A} \cap A) = 2p(A \cap \bar{A})$;
- la probabilité de ne pas obtenir l'événement A est $p(\bar{A})^2$.