Équation cartésienne & Équation réduite Droites du plan

1re Spé

maths-mde.fr
Cours à imprimer pour élève

Lycée Evariste Galois

Cours à imprimer pour élève

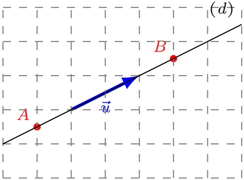
1. Vecteur directeur d'une droite

Définition (Rappel)

Soient A et B deux points distincts d'une droite (d) alors tout vecteur $\overrightarrow{u}$ colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé vecteur directeur de la droite (d).

Exemple

Soient $A(-1;-0,5)$ et $B(3;1,5)$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et donc le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (AB).



2. Norme d'un vecteur

Définition

- Soit A et B deux points. La norme d'un vecteur de $\overrightarrow{AB}$, notée $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, est définie par $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$.
- Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur et deux points A et B tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.
La **norme** de $\overrightarrow{u}$ est alors définie par $\left\|\overrightarrow{u}\right\| = AB$.

Propriété

- Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé alors $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}$.
- Pour tout réel k, on a $\left\|k\overrightarrow{u}\right\| = |k| \times \left\|\overrightarrow{u}\right\|$.

Remarque :

De $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, on retrouve
$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = AB$ dans un repère orthonormé.

Exemple

Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé. On a alors
$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$.

3. Colinéarité de vecteurs

Définition

Dans une base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$, on appelle **déterminant** des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ le réel noté $\det(\vec{u}, \vec{v})$ défini par : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$.

Exemples

- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 1 \times 3 = 5$.
- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ alors
  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 3 \\ 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} - 1 \times 3 = -1$.

Propriété

Dans une base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$, deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Démonstration : Dans le cas de deux vecteurs non nuls.

- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires, autrement dit, il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v} \Rightarrow x = kx'$ et
  $y = ky' \Rightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = x \times y' - y \times x' = kx' \times y' - ky' \times x' = 0$.
- Si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ alors on a $x \times y' - y \times x' = 0 \Rightarrow x \times y' = y \times x'$.
  En supposant que $x \neq 0$, on en déduit que $y' = \frac{x'}{x} \times y$. Or, comme on a aussi $x' = \frac{x'}{x} \times x$, on peut en conclure que $\vec{v} = \frac{x'}{x}\vec{u}$ et que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Propriété

Deux droites (AB) et (MN) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires. Autrement dit si et seulement si $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}) = 0$.

Exemples

Soient $A(2;3)$, $B(5;4)$, $M(5;1)$ et $N(-1;-1)$ des points d'un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5-2 \\ 4-3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -1-5 \\ -1-1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$.
Or, $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}) = 3 \times (-2) - 1 \times (-6) = -6 + 6 = 0$. Donc les deux $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaire et par conséquent les deux droites (AB) et (MN) sont parallèles.

Propriété

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$.

Exemples

Dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, les points $A\begin{pmatrix} -12 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 12 \\ 52 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 72 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont alignés. En effet,

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -12 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 12-(-12) \\ \leftarrow 52-3 \end{array} \quad \text{et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 72-(-12) \\ \leftarrow 1-3 \end{array} .$$

Or, $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -12 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times (-2) - (-\frac{1}{2}) \times 4 = 0$.
Par conséquent, les points A, B et C sont alignés.

4. Équation cartésienne d'une droite

Propriété

Dans un repère d'un plan, $M(x, y)$ est un point d'une droite (d) dont le vecteur directeur est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.
$ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de cette droite.

Démonstration

$$\begin{aligned}
A(x_A; y_A) \in (d) &\iff \text{les vecteurs } \overrightarrow{AM} \ \textit{ et } \ \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires} \\
&\iff \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = 0 \\
&\iff \begin{vmatrix} x - x_A & -b \\ y - y_A & a \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \\
&\iff ax + by - ax_A - by_A = 0 \\
&\iff ax + by + c = 0, \text{avec} - ax_A - by_A = c.
\end{aligned}$$

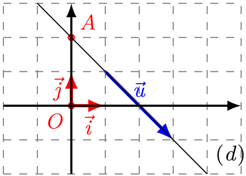
Propriété

L'ensemble des points dont les coordonnées x et y vérifient l'équation $ax + by + c = 0$ est une droite dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, avec a et b de réels non nuls.

Exemple 1

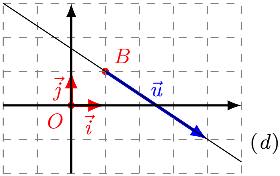
(d) est une droite dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette droite.

Donc, $-2x - 2y + c = 0$ est une équation cartésienne de cette doite, avec c un réel constant.
Or, $A(0;2) \in (d)$. Ainsi, $-2 \times 0 - 2 \times 2 + c = 0$, soit $c = 4$.
Par conséquent, $-2x - 2y + 4 = 0$ est une équation cartésienne représentant la droite (d).



Exemple 2

Dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$,
$2x + 3y - 5 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (d).
Donc, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette droite.



Remarque

Une droite admet une infinité d'équations cartésiennes équivalentes.
En effet, pour tout réel $k \neq 0$, $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow k\left(ax + by + c\right) = 0$.

5. Équation réduite d'une droite

Soit $ax + by + c = 0$ une équation cartésienne d'une droite (d).

- Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors l'équation cartésienne devient $y = -\dfrac{c}{b}$.
- Si $b = 0$ et $a \neq 0$ alors l'équation cartésienne devient $c = -\dfrac{c}{a}$.
- Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ alors l'équation cartésienne devient $y = -\dfrac{b}{a}x - \dfrac{c}{a}$.

Définition

- Toute droite non verticale a une équation réduite de la forme $y = mx + p$ où m s'appelle le coefficient directeur, p l'ordonnée à l'origine et $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ un vecteur directeur.
- Toute droite verticale a une équation réduite de la forme $x = k$.

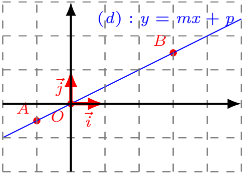
Remarque

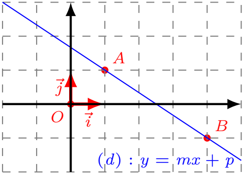
Seules les droites non verticales ont une équation qui peut s'écrire sous forme d'une équation réduite.

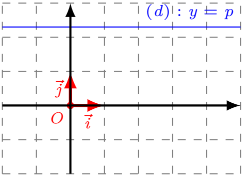
Propriété

Soit m le coefficient directeur de la droite d'équation réduite $y = mx + p$.

- Si $m > 0$ alors la droite « monte ».
- Si $m < 0$ alors la droite « descend ».
- Si $m = 0$ alors la droite est parallèle à l'axe des abscisses.







$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1,5 - (-0,5)}{3 - (-1)} = \frac{2}{4}$$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 1}{-1 - 1} = \frac{3}{-2}$$

$m > 0$ $m < 0$ $m = 0$

Propriétés

- Deux droites d'équations réduites $y = m_1 x + p_1$ et $y = m_2 x + p_2$ sont parallèles si et seulement si $m_1 = m_2$.
- Deux droites d'équations cartésiennes $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ et $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ sont parallèles si et seulement si $a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$.

6. Résolution de systèmes de deux équations à deux inconnues

Propriété

Toute équation du premier degré à deux inconnues possède une infinité de solutions.

$$ax + by + c = 0. \tag{E}$$

L'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ vérifiant l'égalité (E) représente les solutions de cette équation. Graphiquement, cela donne une droite.

Exemple

L'équation cartésienne $x + y + 1 = 0$ admet une infinité de solutions.
$(-0,5; -0,5)$ est une solution de cette équation. En effet, $-0,5 - 0,5 + 1 = 0$.
$(-2; 1)$ est une solution de cette équation. En effet, $-2 + 1 + 1 = 0$.

Définition

Les systèmes de deux équations à deux inconnues sont définis comme suit :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

où a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2 sont des constantes.
Le couple de nombres réels $(x; y)$ vérifiant les deux équations est appelé la solution de ce système.

Remarque

Résoudre un système revient à déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites dont les équations sont celles du système.

Exemple

Résolution du système $\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2x + 5y = 21 \\ 6x + 2y = -2 \end{array} \right.$.

L_1 et L_2 désignent les deux équations formant le système.

⋆ Pour obtenir la valeur de x, il suffit d'éliminer y.

L'observation des coefficients des termes dépendant de y nous suggère l'utilisation de la combinaison $2L_1 - 5L_2$, celle-ci nous permettra de bien éliminer y. Ainsi,

$$\begin{array}{l} 2L_1 \;:\; 4x + 10y = 42 \\ \underline{-5L_2 \;:\; -30x - 10y = 10} \\ 2L_1 - 5L_2 \;:\; -26x = 52 \quad \text{On en déduit que } x = -2 \end{array}.$$

⋆ Idem, pour obtenir la valeur de y, il suffit d'éliminer x. On observe que $3L_1 - L_2$, cette combinaison éliminera bien x. Ainsi,

$$\begin{array}{l} 3L_1 \;:\; 6x + 15y = 63 \\ \underline{-L_2 \;:\; -6x - 2y = 2} \\ 3L_1 - L_2 \;:\; 13y = 65. \quad \text{On en déduit alors que } y = 5. \end{array}.$$

• Rédaction sur une copie :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2x + 5y = 21 \\ 6x + 2y = -2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} 2L_1 - 5L_2 \\ 3L_1 - L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -26x = 52 \\ 13y = 65 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 5 \end{array} \right. .$$

$S = \{(-2; 5)\}$.